Réduction

Plan du chapitre

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Rappels de maths sup et compléments

1) *Matrices semblables*

DÉFINITION 1. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. La matrice A est semblable à la matrice B si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Théorème 1. La relation « A est semblable à B » est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

Réflexivité. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice I_n est inversible et $A = I_n^{-1}AI_n$. Donc, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}AP$ ce qui montre que A est semblable à A.

Symétrie. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Supposons A semblable à B. Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que $A = PBP^{-1}$ ou encore $A = \left(P^{-1}\right)^{-1} BP^{-1}$. La matrice $P' = P^{-1}$ est une matrice inversible telle que $A = P'^{-1}BP'$ et donc B est semblable à A.

Transitivité. Soit $(A, B, C) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^3$. Supposons A semblable à B et B semblable à C. Alors, il existe $(P, P') \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ telle que $B = P^{-1}AP$ et $C = P'^{-1}BP'$. On en déduit que $C = P'^{-1}P^{-1}APP' = (PP')^{-1} A(PP')$. La matrice $P'' = PP'$ est une matrice inversible telle que $C = P''^{-1}AP''$ et donc A est semblable à C.

Commentaire. On peut donc dorénavant dire : les matrices A et B sont semblables.

Rappelons maintenant sans démonstration le lien avec les changements de base.

Théorème 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soient $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Alors $B = P^{-1}AP$ ou aussi $A = PBP^{-1}$.

Ainsi, deux matrices A et B semblables sont aussi les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases d'un même espace de dimension finie. Deux matrices semblables ont donc de nombreuses propriétés en commun.

Théorème 3. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que A et B sont semblables. Alors,

- $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.
- $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$.

Si deux matrices ont même trace et/ou même déterminant et/ou même rang, ces deux matrices ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont toutes deux une trace égale à 2, un déterminant égal à 1 et un rang égal à 2. Pourtant, ces deux matrices ne sont pas semblables car **une matrice semblable à I_2 est nécessairement égale à I_2**. De manière générale, une matrice semblable à λI_n, $\lambda \in \mathbb{K}$, est égale à λI_n ou encore la classe de similitude d'une matrice scalaire est un singleton.

Théorème 4. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que A et B sont semblables. Alors, A est inversible si et seulement si B est inversible.

Démonstration. Si A et B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$. Par suite, $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$ et donc A est inversible si et seulement si B est inversible.

Théorème 5. Soit $(A, B, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Alors,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ B^p = P^{-1}A^pP.$$

Si de plus, A est inversible, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ B^k = P^{-1}A^kP.$$

Démonstration. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A et soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathscr{B}'$ la base de $\mathbb{K}^n$ de matrice P dans la base $\mathscr{B}$. Donc, $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. D'après les formules de changement de base,

$$B = P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f).$$

Mais alors, pour $p \in \mathbb{N}$

$$B^p = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f))^p = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^p) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^p)\,P = P^{-1}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^p P = P^{-1}A^pP,$$

ces égalités restant vraies pour $p \in \mathbb{Z}$ en cas d'inversibilité.

Théorème 6. Soit $(A, B, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Alors, A est nilpotente si et seulement si B est nilpotente et dans ce cas, A et B ont même indice de nilpotence.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = P^{-1}A^kP$. Puisque P et P^{-1} sont inversibles, P et P^{-1} sont simplifiables. Par suite,

$$B^k = 0 \Leftrightarrow P^{-1}A^kP = 0 \Leftrightarrow A^k = 0,$$

ce qui démontre le résultat.

---

2) Matrices diagonales. Matrices triangulaires

2-a) Matrices diagonales

DÉFINITION 2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est une matrice **diagonale** si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ $(i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.
La matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ se note $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ou encore $\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
L'ensemble des matrices diagonales de format n à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

Une matrice scalaire c'est-à-dire une matrice de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbb{K}$, est une matrice diagonale d'un type particulier.

On a les formules :

Théorème 7.
- $\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} + \mathrm{diag}\,(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{diag}\,(\lambda_i + \mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\, \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{diag}\,(\lambda\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$;
- $\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \times \mathrm{diag}\,(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{diag}\,(\lambda_i\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^p = \mathrm{diag}\,(\lambda_i^p)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

De plus,

Théorème 8.
$\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$.
Dans ce cas, $\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et plus généralement,

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ \left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^p = \mathrm{diag}\,(\lambda_i^p)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Théorème 9.
- $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ de dimension n. Une base de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.
- $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.

2-b) Matrices triangulaires

DÉFINITION 2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ $(i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$ (resp. $(i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$).
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de format n à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$).

Une matrice diagonale est en particulier une matrice triangulaire supérieure ou aussi une matrice triangulaire inférieure. Plus précisément, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$.

Théorème 10. Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & & & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit $\mathscr{B}' = (e_n, \dots, e_1)$. $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (car $\mathscr{B}'$ est une famille de rang n) et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{n,n} & a_{n,n-1} & \dots & \dots & a_{n,1} \\ 0 & a_{n-1,n-1} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{2,2} & a_{2,1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix} = B.$$

La matrice A est semblable à la matrice B et B est triangulaire supérieure.

Théorème 11.

- $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Une base de $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$) est $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ (resp. $(E_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$).
- $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$) est une sous-algèbre de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.

Le théorème précédent signifie en particulier qu'une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) et un produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Contentons-nous de revérifier qu'un produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices triangulaires supérieures.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$. Le coefficient ligne i, colonne j de la matrice AB est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Dans cette somme, si $k < i$, $a_{i,k} = 0$ et donc $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ et si $k \geqslant i$, alors $k > j$ et donc $b_{k,j} = 0$ puis $a_{i,k}b_{k,j} = 0$. Finalement, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ puis $c_{i,j} = 0$.

Notons qu'avec un raisonnement analogue, si $i = j$, $c_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = 0 + \dots + 0 + a_{i,i}b_{i,i} + 0 + \dots + 0 = a_{i,i}b_{i,i}$ et donc

Théorème 12.

- $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$ et dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

3) Rappels sur les sommes de plusieurs sous-espaces

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E puis F_1, ..., F_p, p sous-espaces vectoriels de E ($p \geqslant 2$).

Définition 3. La somme des sous-espaces F_1, ..., F_p est l'ensemble des sommes d'un vecteur de F_1, d'un vecteur de F_2 ... et d'un vecteur de F_p ou encore $F_1 + \dots + F_p = \{x_1 + \dots + x_p,\ (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p\}$.

La somme $F_1 + \dots + F_p$ peut se noter $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$. Si $p = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est tout simplement F_1.

Théorème 13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

Définition 4. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe si et seulement si tout vecteur x de cette somme peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_1 + \dots + x_p$ où $x_1 \in F_1$, ..., $x_p \in F_p$. Dit autrement,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ directe} \Leftrightarrow \forall \left((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}, (x_i')_{1 \leqslant i \leqslant p}\right) \in \left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right)^2, \left(\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} x_i' \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = x_i'\right).$$

Ceci peut encore s'énoncer sous la forme

$$\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ directe} \Leftrightarrow \text{l'application } \varphi : \begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{i=1}^{p} F_i & \to & E \\ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \end{array} \text{ est injective.}$$

Dans ce cas, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ se note $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ou aussi $\displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$.

Commentaire. L'application φ de la définition précédente est clairement linéaire et donc la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si φ induit un isomorphisme de $\prod_{i=1}^{p} F_i$ sur $\mathrm{Im}(\varphi) = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

On dispose de deux caractérisations des sommes directes :

Théorème 14.

1) La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ F_i \cap \sum_{j\neq i} F_j = \{0\}$.

2) La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe $\Leftrightarrow \forall i \in [\![2,p]\!],\ F_i \cap \sum_{j< i} F_j = \{0\}$.

Ainsi, si F, G et H sont trois sous-espaces d'un espace E, la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $F\cap(G+H)=\{0\}$ et $G\cap(F+H)=\{0\}$ et $H\cap(F+G)=\{0\}$ mais aussi

la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $G\cap F=\{0\}$ et $H\cap(F+G)=\{0\}$.

Si la somme est directe, il est nécessaire que l'on ait $\forall i\neq j,\ F_i\cap F_j=\{0\}$ mais cette condition n'est pas suffisante. Par exemple, notons (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis posons $D_1=\mathrm{Vect}(e_1)$, $D_2=\mathrm{Vect}(e_2)$ et $D_3=\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$. On a $D_1\cap D_2=D_1\cap D_3=D_2\cap D_3=\{0\}$. Pourtant, la somme $D_1+D_2+D_3$ n'est pas directe car le vecteur e_1+e_2 est un vecteur de $D_1+D_2+D_3$ pouvant se décomposer de plusieurs manières distinctes comme somme d'un vecteur de D_1, d'un vecteur de D_2 et d'un vecteur de D_3 :

$$e_1+e_2=0.e_1+0.e_2+1.(e_1+e_2)=1.e_1+1.e_2+0.(e_1+e_2)=\frac{1}{2}.e_1+\frac{1}{2}.e_2+\frac{1}{2}.(e_1+e_2).$$

Démonstration du théorème 14.

1) • Supposons la somme $\sum_{k=1}^{p} F_i$ directe. Soit $i\in[\![1,p]\!]$. Soit $x_i\in F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j$. Alors, il existe $(x_j)_{j\neq i}\in\prod_{j\neq i}F_j$ tel que $x_i=\sum_{j\neq i}x_j$. Cette égalité s'écrit plus explicitement

$$\underbrace{0}_{\in F_1}+\ldots+\underbrace{0}_{\in F_{i-1}}+\underbrace{x_i}_{\in F_i}+\underbrace{0}_{\in F_{i+1}}+\ldots+\underbrace{0}_{\in F_p}=\underbrace{x_1}_{\in F_1}+\ldots+\underbrace{x_{i-1}}_{\in F_{i-1}}+\underbrace{0}_{\in F_i}+\underbrace{x_{i+1}}_{\in F_{i+1}}+\ldots+\underbrace{x_p}_{\in F_p}.$$

L'unicité d'une telle décomposition nous permet d'identifier terme à terme ce qui fournit en particulier $x_i=0$.

On a montré que $\forall i\in[\![1,p]\!],\ F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j=\{0\}$.

• Supposons que $\forall i\in[\![1,p]\!],\ F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j=\{0\}$. Soit $\left((x_i)_{1\leqslant i\leqslant p},(x'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\right)\in\left(\prod_{i=1}^{p}F_i\right)^2$ tel que $\sum_{j=1}^{p}x_j=\sum_{j=1}^{p}x'_j$. Soit $i\in[\![1,p]\!]$. On a

$$x_i-x'_i=\sum_{j\neq i}\left(x'_j-x_j\right).$$

Le vecteur $\sum_{j\neq i}\left(x'_j-x_j\right)$ est un élément de $\sum_{j\neq i}F_j$ et donc le vecteur $x_i-x'_i$ est dans $F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j$. Par suite, le vecteur $x_i-x'_i$ est nul et donc $x_i=x'_i$.

Ceci montre que la somme $\sum_{i=1}^{p}F_i$ est directe.

2) • Supposons la somme $\sum_{k=1}^{p}F_i$ directe. Soit $i\in[\![2,p]\!]$. D'après 1), $F_i\cap\sum_{j<i}F_j\subset F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j=\{0\}$ et donc $F_i\cap\sum_{j<i}F_j=\{0\}$.

• Supposons $\forall i \in [\![2,p]\!]$, $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$. Montrons que la somme $\sum_{j=1}^{p} F_j$ est directe.

Soit $\left((x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}, (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\right) \in \left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right)^2$ tel que $\sum_{j=1}^{p} x_j = \sum_{j=1}^{p} x'_j$.

Supposons par l'absurde que $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \neq (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. Soit $i = \text{Max}\left\{j \in [\![1,p]\!],\ x_j \neq x'_j\right\}$. Par définition de i, $\sum_{j=1}^{i} x_j = \sum_{j=1}^{i} x'_j$ puis

$$x_i - x'_i = \sum_{j<i} \left(x'_j - x_j\right),$$

(si $i = 1$, $\sum_{j<i} \left(x'_j - x_j\right) = 0$). Le vecteur $\sum_{j<i} \left(x'_j - x_j\right)$ est dans $\sum_{j<i} F_j$ et donc le vecteur $x_i - x'_i$ est dans $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$ (y compris si $i = 1$). On en déduit que $x_i = x'_i$ ce qui contredit la définition de i.

Donc, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. Ceci montre que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

DÉFINITION 5. Les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont **supplémentaires** dans E si et seulement si $\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i = E$.

Il revient au même de dire que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ où $x_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p$ ou encore si et seulement si l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{p} F_i & \rightarrow & E \\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}$ est bijective.

Commentaire. L'application φ de la définition précédente est clairement linéaire et donc les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E si et seulement si φ est un isomorphisme.

Théorème 15. On suppose de plus que $\dim(E) < +\infty$.

1) $\dim\left(\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

2) $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

3) $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i \Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Démonstration.

1) Si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{p} F_i$ et donc

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \dim\left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

2) Montrons l'inégalité et son cas d'égalité par récurrence sur $p \geqslant 2$.

- Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces de E.

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{2} F_i\right) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) \text{ (relation de Grassmann)}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ ou encore si et seulement si la somme $F_1 + F_2$ est directe.
Le résultat à démontrer est donc vrai pour $p = 2$.

• Soit $p \geqslant 2$. Supposons que si $F_1, \ldots, F_p$ sont p sous-espaces de E, alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.
Soient $F_1, \ldots, F_{p+1}$, $p+1$ sous-espaces vectoriels de E.

$$\begin{aligned}
\dim\left(\sum_{i=1}^{p+1} F_i\right) &= \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i + F_{p+1}\right)\\
&= \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) + \dim(F_{p+1}) - \dim\left(\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \cap F_{p+1}\right)\\
&\leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) + \dim(F_{p+1})\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) + \dim(F_{p+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= \sum_{i=1}^{p+1} \dim(F_i).
\end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si chacune des deux inégalités écrites est une égalité. La première inégalité écrite est une égalité si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \cap F_{p+1} = \{0\}$. La deuxième est une égalité si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, par hypothèse de récurrence.

Donc, d'après le théorème 14, on a l'égalité si et seulement si $\forall i \in [\![2, p+1]\!]$, $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$ ou encore si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{p+1} F_i$ est directe, toujours d'après le théorème 14.

Le résultat est démonté par récurrence.

Donnons maintenant un résultat qui fait le lien entre bases et sous-espaces supplémentaires. On se donne E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. On se donne ensuite $F_1, \ldots, F_p$, p sous-espaces vectoriels de E de dimensions toutes non nulles, où $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note n_i la dimension de F_i.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on définit $\mathscr{B}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, \ldots, e_{n_i,i})$ une base de F_i puis on note $\mathscr{B}$ la famille de vecteurs de E obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_i$:

$$\mathscr{B} = \left(e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{n_1,1}, e_{1,2}, e_{2,2}, \ldots, e_{n_2,2}, \ldots, e_{1,p}, e_{2,p}, \ldots, e_{n_p,p}\right).$$

Alors,

Théorème 16.
$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est une base de E.

Quand la somme $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$, on dit alors que la base $\mathscr{B}$ est une **base adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$.

Démonstration. D'après le théorème 15,

$$\begin{aligned} E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i &\Leftrightarrow n = \sum_{i=1}^{p} n_i \\ &\Leftrightarrow \text{card}\,(\mathscr{B}) = \dim(E). \end{aligned}$$

Si $\mathscr{B}$ est une base de E, on a $\text{card}\,(\mathscr{B}) = \dim(E)$ et donc $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i$.

Si $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i$, alors d'une part $\text{card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$ et d'autre part, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$ ou encore $\mathscr{B}$ est génératrice de E. On en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Pour en finir avec les résultats préparatoires au cours sur la réduction, donnons le résultat qui dit qu'un endomorphisme est uniquement déterminé par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires. On revient au cas général où E est de dimension quelconque.

Théorème 17. Soient $F_1, \ldots, F_p$, p sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)$. Alors

1) $f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_{/F_i} = 0$.
2) $f = g \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_{/F_i} = g_{/F_i}$.

Démonstration.

1) Si $f = 0$, alors ses restrictions aux F_i sont nulles et si les restrictions de f aux F_i sont nulles, par linéarité, f est nulle.
2) On applique le 1) à $g - f$.

II - Sous-espaces stables

1) Cas général

1-a) Définition

Définition 6. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E

F est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$ ou encore

$$F \text{ stable par } f \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x \in F \Rightarrow f(x) \in F).$$

On a immédiatement

Théorème 18. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme de E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $f_{/F}$ induit un endomorphisme de F.

Commentaire. Si F est stable par f, alors pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$. On peut alors définir l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
$\widetilde{f}$ est linéaire et donc $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(F)$. $\widetilde{f}$ n'est pas tout à fait la restriction $f_{/F}$ de f à F car cette restriction est $f_{/F} : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
D'où le vocabulaire « $f_{/F}$ induit un endomorphisme de F » et non pas « $f_{/F}$ est un endomorphisme de F ». ❑

On décrit maintenant une situation importante où des sous-espaces sont stables par un certain endomorphisme. C'est la situation où deux endomorphismes **commutent**. Nous reviendrons sur cette situation dans le paragraphe « commutant d'un endomorphisme ».

Théorème 19. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f et g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f = f \circ g$.
Alors, g laisse stable $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et plus généralement $\text{Ker}\,(f - \lambda Id_E)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Supposons que f et g commutent.

• Montrons que $\text{Im}(f)$ est stable par g. Pour tout $x \in E$,

$$g\,(f(x)) = f\,(g(x)) \in \text{Im}(f).$$

Ainsi, $\forall x \in E$, $g(f(x)) \in \text{Im}(f)$ ou encore $g\,(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.

• Montrons que $\text{Ker}(f)$ est stable par g. Soit $x \in \text{Ker}(f)$.

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0.$$

Ainsi, $\forall x \in \text{Ker}(f),\ g(x) \in \text{Ker}(f)$ ou encore $g(\text{Ker}(f)) \subset \text{Ker}(f)$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par g.

$$g \circ (f - \lambda \text{Id}_E) = g \circ f - \lambda g = f \circ g - \lambda g = (f - \lambda \text{Id}_E) \circ g.$$

Puisque les endomorphismes $f - \lambda \text{Id}_E$ et g commutent, $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par g d'après le paragraphe précédent.

Commentaire. On peut montrer directement que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par g de la façon suivante. Tout d'abord, pour $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda x.$$

Mais alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

et donc $g(x) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.

1-b) Interprétation matricielle

On se place dans le cas particulier où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On se donne un endomorphisme f de E puis un sous-espace F de E non nul et distinct de E. On se donne ensuite G un sous-espace de E puis $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. On note p la dimension de F et n la dimension de E.

Si F est stable par f, l'image d'un vecteur de F est un vecteur de F. Donc, la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $0_{n-p,p}$ est la matrice nulle de format $(n-p,p)$. Dit autrement, la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est **triangulaire supérieure par blocs**.

Si on suppose de plus que G est stable par f, la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}$ ou encore la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est **diagonale par blocs**.

Plus généralement, si on a décomposé E en sommes directes de sous-espaces stables par f ($E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$ où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f(F_i) \subset F_i$) et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

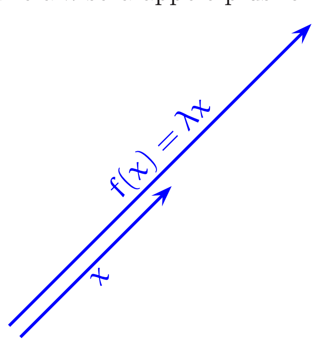
(les 0 représentant des blocs de zéros) et donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs.

2) Droites stables

Un cas particulier de sous-espace stable par un endomorphisme est quand ce sous-espace est une droite. Soit x un vecteur **non nul** puis $D = \text{Vect}(x)$. Soit f un endomorphisme de E.

$$D \text{ stable par } f \Leftrightarrow f(\text{Vect}(x)) \subset \text{Vect}(x) \Leftrightarrow f(x) \in \text{Vect}(x) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda x.$$

Un vecteur x **non nul** tel que $f(x)$ soit colinéaire à x sera appelé plus loin **vecteur propre** de f.



Supposons maintenant que E soit de dimension finie non nulle et que l'on ait trouvé une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que chaque e_i soit un vecteur propre de f. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est alors de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où les λ_i sont de nombres. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est dans ce cas une **matrice diagonale**.

3) Réduire un endomorphisme ou une matrice carrée

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie non nulle. On va chercher une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit la plus simple possible : diagonale , triangulaire , diagonale ou triangulaire par blocs. **Réduire** l'endomorphisme f, c'est chercher (et trouver) une telle base.

Soit A une matrice carrée. On va chercher une matrice carrée semblable à A et la plus simple possible ou encore, plus explicitement, on va chercher une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit la plus simple possible : diagonale , triangulaire , diagonale ou triangulaire par blocs. **Réduire** la matrice A, c'est chercher (et trouver) une telle matrice.

Quel est l'intérêt ? Un des premiers buts de ce chapitre est le calcul des puissances successives d'une matrice. Si on a pu écrire $A = PBP^{-1}$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = PB^pP^{-1}$, cette dernière égalité restant valable pour $p \in \mathbb{Z}$ si la matrice A est inversible.

Si B est une matrice plus simple que A, on peut espérer que le calcul des puissances de B se fasse plus facilement que le calcul des puissances de A. Ceci est en particulier le cas si B est une matrice diagonale D.

Ainsi, par exemple, on peut montrer que $A = PDP^{-1}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n &= A^n = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ -1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III - Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

1) Valeurs et vecteurs propres

Définition 7. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis f un endomorphisme de E.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une **valeur propre** de f si et seulement si $\exists x \in E \setminus \{0\}/\ f(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in E$. x est un **vecteur propre** de f si et seulement si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda x$.

Commentaire. La définition précédente est donnée pour un espace E de dimension quelconque non nulle, éventuellement infinie.

Définition 8. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une **valeur propre** de A si et seulement si $\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}/\ AX = \lambda X$.
- Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. X est un **vecteur propre** de A si et seulement si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ AX = \lambda X$.

Commentaire. Si E est de dimension finie non nulle, $\mathscr{B}$ est une base de E, f un endomorphisme de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$, alors il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ valeur propre de } A.$$

Un tout premier résultat est le fait qu'un vecteur propre est associé à une unique valeur propre :

Théorème 20. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis f un endomorphisme de E.
Soit x un vecteur non nul. Si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $f(x) = \lambda x$ et $f(x) = \mu x$, alors $\lambda = \mu$.

Commentaire. Quand x est un vecteur **non nul** et λ est un nombre tel que $f(x) = \lambda x$, on dit que x est un vecteur propre **associé** à la valeur propre λ.

Démonstration. Si $f(x) = \lambda x$ et $f(x) = \mu x$, alors $(\lambda - \mu)x = 0$ et donc $\lambda - \mu = 0$ car $x \neq 0$.

Commentaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(0) = 0 = \lambda.0$. Pourtant, le vecteur nul n'est pas un vecteur propre de f car par définition, **un vecteur propre est non nul**.

Exemple 1. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$AU = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.U$$

Donc, 1 est une valeur propre de A et U est un vecteur propre associé. ❏

Exemple 2. Soient F et G deux sous-espaces non nuls d'un espace E de dimension quelconque. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p la projection sur F parallèlement à G.
On sait que pour tout vecteur x de F, $p(x) = x = 1.x$ et donc 1 est valeur propre de la projection p et tout vecteur **non nul** de F est un vecteur propre associé.
De même, on sait que pour tout vecteur x de G, $p(x) = 0 = 0.x$ et donc 0 est valeur propre de la projection p et tout vecteur **non nul** de G est un vecteur propre associé. ❏

Exemple 3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. On sait que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$.

• Si P est un polynôme tel que $\deg(P) = 0$ (et donc $P \neq 0$), alors $f(P) = 0 = 0.P$ et donc P est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

• Si d'autre part $\deg(P) \geqslant 1$ et $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P) > \deg(P')$ et en particulier, $P' = f(P) \neq \lambda P$. Donc, si $\lambda \neq 0$, λ n'est pas valeur propre de f.

Ainsi, f admet une valeur propre et une seule à savoir le nombre 0. ❏

Exemple 4. Un endomorphisme (ou une matrice) n'admet pas nécessairement de valeur propre. Par exemple, considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$. Il est clair que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$.

Si P est un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\deg(f(P)) = \deg(XP) = 1 + \deg(P) > \deg(P) \geqslant \deg(\lambda P)$ et en particulier, $f(P) \neq \lambda P$.

Donc, il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $f(P) = \lambda P$ ou encore f n'admet ni valeur propre, ni vecteur propre. ❏

Exemple 5. On peut donner un autre exemple où E est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et de son orientation canonique, notons r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Si x est un vecteur non nul de E, $r(x)$ n'est bien sûr pas colinéaire à x et donc x n'est pas un vecteur propre de r. De nouveau, on a un exemple d'endomorphisme n'admettant ni valeur propre, ni vecteur propre.

Le problème est plus ambigu si on analyse la matrice de r dans la base canonique orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Cette matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, cette matrice n'a pas de valeur propre **réelle**. Mais on peut penser A comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si c'est le cas, on remarque que si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ (où $i^2 = -1$), alors

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = iU.$$

Donc, si on conçoit A comme un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, alors A admet i pour valeur propre (complexe non réelle). ❏

Définition 9. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f s'appelle le **spectre** de f et se note $\mathrm{Sp}(f)$.
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A s'appelle le **spectre** de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$.

Commentaire 1. Pour une matrice A à coefficients réels, la notation $\mathrm{Sp}(A)$ peut se révéler ambigüe. Suivant que l'on conçoive A comme une matrice à coefficients réels ou complexes, on ne cherchera que des valeurs propres réelles ou des valeurs propres complexes. L'ensemble des valeurs propres réelles de A pourra se noter plus explicitement $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et l'ensemble des valeurs propres complexes pourra se noter plus explicitement $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Commentaire 2. La définition du spectre donnée ci-dessus n'est pas définitive. Pour l'instant, le spectre désigne l'**ensemble** des valeurs propres. Par exemple, $\mathrm{Sp}(A) = \{1; 2\}$ signifie que A admet deux valeurs propres à savoir 1 et 2. Néanmoins, on découvrira plus loin dans ce chapitre qu'une valeur propre donnée peut l'être « plusieurs fois ». Le spectre désignera à partir de ce moment-là la **famille** des valeurs propres. Par exemple, on écrira $\mathrm{Sp}(A) = (1; 1; 2)$ pour préciser le fait que 1 est valeur propre deux fois.

Exercice 1. Déterminer le spectre d'un endomorphisme nilpotent d'un espace E non réduit à $\{0\}$.

Solution 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$. Soit λ une éventuelle valeur propre de f. Il existe un vecteur non nul x tel que $f(x) = \lambda x$.

On en déduit par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Mais alors, $\lambda^p x = f^p(x) = 0$ et donc $\lambda^p = 0$ (car $x \neq 0$) puis $\lambda = 0$.

On a montré que si f admet une valeur propre λ, nécessairement $\lambda = 0$.

Réciproquement, supposons par l'absurde que f soit injectif. Alors, f^k est injectif ce qui contredit l'égalité $f^k = 0$ (puisque $E \neq \{0\}$, 0 n'est pas injectif). Donc, f n'est pas injectif puis $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et donc, il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0 = 0.x$. Ceci montre que 0 est valeur propre de f et finalement que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Dans l'exercice précédent, deux idées ont été utilisées qui méritent d'être énoncées explicitement. Ce sont les trois théorèmes qui suivent.

Théorème 21. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis f un endomorphisme de E.
- 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injectif.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, λ valeur propre de $f \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

Si de plus, $\dim(E) < +\infty$, alors
- $0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f \notin GL(E)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E)$.

Démonstration. $0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0/\ f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow f$ non injectif.
Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0/\ f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \neq 0/\ \left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ non injectif.}$$

Enfin, si de plus $\dim(E) < +\infty$, on sait que $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ non injectif $\Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E)$.

Pour une matrice carrée, cela donne

Théorème 22. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- $0 \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A \notin GL_n(\mathbb{K})$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $\mathrm{rg}\left(A - 2I_3\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 3$. Donc, $A - 2I_3 \notin GL_3(\mathbb{R})$ ou encore 2 est une valeur propre de A.

Exercice 2. Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$.

Solution 2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont les complexes λ tels que $A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C})$. Une valeur propre de A est évidente : si $\lambda = 0$, la matrice $A - \lambda I_n = A$ est de rang $1 < n$ et n'est donc pas inversible. Donc 0 est une valeur propre de A.

1 ère solution. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_2 \\ \quad\quad\vdots \\ x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_n \end{array} \right. \quad (S).$$

Les valeurs propres de A sont les complexes λ tels que le système (S) admettent au moins une solution non nulle.
• Si $\lambda = 0$, $(S) \Leftrightarrow x_1 + \ldots + x_n = 0$. Donc, (S) admet au moins une solution non nulle comme $(1, -1, 0, \ldots, 0)$ par exemple. On en déduit que 0 est valeur propre de A.
• Si $\lambda \neq 0$,

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ \quad\quad\vdots \\ x_n = x_1 \\ x_1 + \ldots + x_1 = \lambda x_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ \quad\quad\vdots \\ x_n = x_1 \\ (n-\lambda)x_1 = 0 \end{array} \right. .$$

Si $\lambda \neq n$, alors $(S) \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2 = \ldots = x_n$. Dans ce cas, (S) n'admet pas de solution non nulle et donc λ n'est pas valeur propre de A.
Si $\lambda = n$, $(S) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Dans ce cas, (S) admet une solution non nulle comme $(1, \ldots, 1)$ par exemple. On en déduit que $\lambda = n$ est valeur propre de A.

2 ème solution.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} n-\lambda & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n-\lambda & 1-\lambda & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-\lambda & 1 & \ldots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n).
\end{aligned}$$

Si $\lambda = n$, $\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) < n$ (car la première colonne de la dernière matrice est nulle). Donc, $A - nI_n \notin GL_n(\mathbb{C})$ puis n est valeur propre de A.
Si $\lambda \neq n$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad (C_1 \leftarrow \frac{1}{n-\lambda}C_1) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad (\forall i \in [\![2, n]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_1).
\end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 0$ (et $\lambda \neq n$), $\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) = n$ et donc λ n'est pas valeur propre de A. Si $\lambda = 0$, $\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) < n$ et donc 0 est valeur propre de A.

On a montré que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, n\}.}$$

Théorème 23.
• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis f un endomorphisme de E.
Soit $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}$. On suppose que $f(x) = \lambda x$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.

• Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(X, \lambda) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$. On suppose que $AX = \lambda X$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur k.

• Puisque $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et que $\lambda^0 = 1$, le résultat est vrai quand $k = 0$.
• Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $f^k(x) = \lambda^k x$. Alors, $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = \lambda^k f(x) = \lambda^{k+1} x$.

Le résultat est démontré par récurrence.

On a vu (page 12) des exemples d'endomorphismes n'admettant pas de valeur propres. Dans les deux cas, f était un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une fois de dimension infinie et une fois de dimension finie. Il existe pourtant une situation où on sait à l'avance que f a au moins une valeur propre :

Théorème 24.
• Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre.
• Toute élément $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

Démonstration. Soient E un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle puis f un endomorphisme de E. D'après le théorème 22, page 12, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f - \lambda\mathrm{Id}_E \notin GL(E) \Leftrightarrow \det(f - \lambda\mathrm{Id}_E) = 0$.

Maintenant, $z \mapsto \det(f - z\mathrm{Id}_E) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - z & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - z & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - z \end{vmatrix}$ est une fonction polynomiale (à partir de l'expression développée de ce déterminant). De plus, dans l'expression développée de ce déterminant, tous les termes sont des polynômes en z sont de degré inférieur ou égal à n et un et un seul terme de ce développement est de degré n à savoir $(a_{1,1} - z) \dots (a_{n,n} - z)$. Donc $\det(f - z\mathrm{Id}_E)$ est un polynôme de degré $n (\geqslant 1)$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det(f - \lambda\mathrm{Id}_E) = 0$. λ est une valeur propre de f.

On donne maintenant un résultat important sur des familles de vecteurs propres.

Théorème 25. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$.

Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que toute famille finie de vecteurs propres de f associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. On montre le résultat par récurrence sur le cardinal n d'une telle famille.

• Soit x_1 un vecteur propre de f. Par définition $x_1 \neq 0$ et donc la famille (x_1) est libre. Le résultat est donc vrai quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille de cardinal n de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes soit libre. Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une famille de $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes de f puis $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une famille de vecteurs propres associée. Montrons que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est libre.

Soit $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0 \qquad (\mathrm{I}).$$

En prenant l'image des deux membres par f, on obtient

$$\alpha_1\lambda_1x_1+\ldots+\alpha_n\lambda_nx_n+\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}x_{n+1}=0 \qquad \text{(II)}.$$

Mais alors

$$\alpha_1\left(\lambda_1-\lambda_{n+1}\right)x_1+\ldots+\alpha_n\left(\lambda_n-\lambda_{n+1}\right)x_n=0 \quad ((\text{II})-\lambda_{n+1}(\text{I})).$$

Par hypothèse de récurrence, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre. Donc, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_i\left(\lambda_i-\lambda_{n+1}\right)=0$ puis $\alpha_i=0$ (car $\lambda_i-\lambda_{n+1}\neq 0$). Il reste $\alpha_{n+1}x_{n+1}=0$ et donc $\alpha_{n+1}=0$ car $x_{n+1}\neq 0$. On a montré que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ est libre.

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice 3. Pour $a\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_a(x)=e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Solution 3. Soit $E=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $\varphi:\begin{array}{ccc}E&\rightarrow&E\\ f&\mapsto&f'\end{array}$. φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E. De plus, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\varphi\left(f_a\right)=af_a$. Puisque $f_a\neq 0$, a est valeur propre de φ et f_a est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre a.

Ainsi, la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille de vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On en déduit que famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Une conséquence immédiate du théorème 25 est :

Théorème 26.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme de E.
Alors, f admet au plus n valeurs propres et en particulier, f admet un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres.
- Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors, A admet au plus n valeurs propres et en particulier, A admet un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres.

Démonstration. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et on conclut avec le théorème 25.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $fg-gf=f$.

1) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^kg-gf^k=kf^k$.
2) Soit $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E)&\rightarrow&\mathscr{L}(E)\\ h&\mapsto&fh-hf\end{array}$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.
3) Déduire de ce qui précède que f est nilpotent.

Solution 4.

1) Le résultat est clair pour $k=0$ ou $k=1$. Soit $k\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}f^kg-gf^k&=\sum_{i=0}^{k-1}\left(f^{k-i}gf^i-f^{k-(i+1)}gf^{i+1}\right)\ \text{(somme télescopique)}\\&=\sum_{i=0}^{k-1}f^{k-i-1}\left(fg-gf\right)f^i=\sum_{i=0}^{k-1}f^{k-i-1}\circ f\circ f^i=\sum_{i=0}^{k-1}f^k\\&=kf^k.\end{aligned}$$

On a montré que $\forall k\in\mathbb{N},\ f^kg-gf^k=kf^k$.

2) Soit $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E)&\rightarrow&\mathscr{L}(E)\\ h&\mapsto&f\circ h-h\circ f\end{array}$. Tout d'abord, $\varphi\left(\mathscr{L}(E)\right)\subset\mathscr{L}(E)$ car $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau. Ensuite, pour $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{K}^2$ et $(h_1,h_2)\in(\mathscr{L}(E))^2$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) &= f(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) - (\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) f = \alpha_1 (f h_1 - h_1 f) + \alpha_2 (f h_2 - h_2 f) \\ &= \alpha_1 \varphi(h_1) + \alpha_2 \varphi(h_2).\end{aligned}$$

Donc, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.

3) Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \neq 0$. D'après 1), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi\left(f^k\right) = k f^k$. Puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \neq 0$, on en déduit que φ admet pour valeurs propres tous les entiers naturels non nuls.

Ceci est impossible car $\dim(\mathscr{L}(E)) = n^2 < +\infty$. Donc, $\exists k \in \mathbb{N}^* /\ f^k = 0$ et f nilpotent.

Exercice 5. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{2n}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2nXP \end{array}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$.

2) Déterminer les valeurs propres de φ.

Solution 5.

1) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. $\deg\left(\left(X^2-1\right)P'\right) \leqslant 2n+1$ et $\deg(2nXP) \leqslant 2n+1$. Donc, $\deg(\varphi(P)) \leqslant (2n+1)$. De plus, si on pose $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, le coefficient de X^{2n+1} dans $\varphi(P)$ est

$$a_{2n} \times (2n - 2n) = 0.$$

Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. D'autre part, si $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_{2n}[X])^2$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) &= \left(X^2-1\right)(\alpha_1 P_1' + \alpha_2 P_2') - 2nX(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) \\ &= \alpha_1\left(\left(X^2-1\right)P_1' - 2nXP_1\right) + \alpha_2\left(\left(X^2-1\right)P_2' - 2nXP_2\right) \\ &= \alpha_1 \varphi(P_1) + \alpha_2 \varphi(P_2).\end{aligned}$$

On a montré que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de φ. Il existe $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.

$$\begin{aligned}\varphi(P) = \lambda P \Leftrightarrow \left(X^2-1\right)P' - 2nXP = \lambda P &\Leftrightarrow \left(X^2-1\right)P' = (2nX + \lambda)P \\ &\Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{2nX+\lambda}{X^2-1} \text{ (car } P \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{(2n+\lambda)/2}{X-1} + \frac{(2n-\lambda)/2}{X+1}.\end{aligned}$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples usuelles de $\frac{P'}{P}$ (si $P = K(X-z_1)^{\alpha_1} \ldots (X-z_k)^{\alpha_k}$ où les $K \neq 0$, les z_i sont des complexes deux à deux distincts et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = n$, alors $\frac{P'}{P} = \frac{\alpha_1}{X-z_1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{X-z_k}$), on voit que P est nécessairement de degré $\frac{2n+\lambda}{2} + \frac{2n-\lambda}{2} = 2n$ puis que P est nécessairement de la forme $K(X-1)^k(X+1)^{2n-k}$ où $K \in \mathbb{R}^*$ puis $k \in [\![0, 2n]\!]$.

Réciproquement, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, posons $P_k = (X-1)^k(X+1)^{2n-k}$. D'après ce qui précède, un vecteur propre de φ est nécessairement de la forme KP_k où $k \in [\![0, 2n]\!]$ et $K \in \mathbb{R}^*$. Or,

- $\varphi(P_0) = (2n)\left(X^2-1\right)(X+1)^{2n-1} - 2nX(X+1)^{2n} = (2n(X-1) - 2nX)(X+1)^{2n} = -2nP_0$;
- $\varphi(P_{2n}) = (2n)(X^2-1)(X-1)^{2n-1} - 2nX(X-1)^{2n} = (2n(X+1) - 2nX)(X-1)^{2n} = 2nP_{2n}$;
- Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\varphi(P_k) &= \left(X^2-1\right)\left[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{2n-k} + (2n-k)(X-1)^k(X+1)^{2n-k-1}\right] - 2nX(X-1)^k(X+1)^{2n-k} \\ &= (k(X+1) + (2n-k)(X-1) - 2nX)(X-1)^k(X+1)^{2n-k} = 2(k-n)P_k,\end{aligned}$$

  ce qui reste vrai pour $k = 0$ ou $2n$. Puisque chaque P_k est non nul, ceci montre que les nombres $2(k-n)$, $k \in [\![0, 2n]\!]$, sont valeurs propres de φ.

En résumé, une valeur propre de φ est nécessairement de la forme $\lambda_k = 2(k-n)$ pour $k \in [\![0, 2n]\!]$ et réciproquement, chaque λ_k, $k \in [\![0, 2n]\!]$, est valeur propre de φ. On a montré que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{2(k-n),\ k \in [\![0, 2n]\!]\}.}$$

---

2) Sous-espaces propres

Théorème 27.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = \lambda x$ est un sous-espace vectoriel de E.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble des vecteurs colonnes X tels que $AX = \lambda X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration. On démontre le résultat pour une endomorphisme f. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

L'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = \lambda x$ est donc $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. En particulier, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = \lambda x$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 10.
• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis f un endomorphisme de E.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre éventuelle de f. Le **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ est

$$E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ (ou plus simplement } E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre éventuelle de A. Le **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ est

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \text{ (ou plus simplement } E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)).$$

Par définition d'une valeur propre,

Théorème 28.
• λ est valeur propre de $f \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.
• λ est valeur propre de $A \in \mathbb{K}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$.

Commentaire 1. Quand λ n'est pas une valeur propre de f, $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{0\}$. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas un sous-espace propre de f.

Commentaire 2. Quand λ est une valeur propre de f, par définition, le sous-espace propre $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ associé à λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Dans ce cas, on trouve dans E_λ deux types de vecteurs : d'une part le vecteur nul et d'autre part les vecteurs propres de f associés à la valeur propres λ (vecteurs propres qui sont par définition non nuls).

Commentaire 3. Pour tout x de $E_\lambda(f)$, $f(x) = \lambda x$. Donc, la restriction de f à $E_\lambda(f)$ « est » l'homothétie de rapport λ.

Exercice 6. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle. On suppose que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

Solution 6. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, f admet au moins une valeur propre λ. Par définition, $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Puisque $g \circ f = f \circ g$, on sait que g laisse stable $E_\lambda(f)$. Par suite, l'application $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} E_\lambda(f) & \to & E_\lambda \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ est un endomorphisme de $E_\lambda(f)$. Puisque $E_\lambda(f)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\tilde{g}$ admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre x_0 (associé à cette valeur propre).

x_0 est par construction un vecteur propre de g. D'autre part, x_0 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et donc x_0 est un vecteur propre de f.

On a trouvé un vecteur propre commun à f et à g.

On donne maintenant une propriété importante des sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice :

Théorème 29.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ puis f un endomorphisme de E.

On suppose que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A. Alors, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$ est directe.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur p.

• Si $p = 1$, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} E_{\lambda_i}$ est directe.

• Soit $p \geqslant 1$. Supposons qu'une somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes soit directe.

Soit f un endomorphisme de E admettant (au moins) $p+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$.

Montrons que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}$ est directe.

On sait déjà par hypothèse de récurrence que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe et donc que $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $E_{\lambda_i} \cap \displaystyle\sum_{j<i} E_{\lambda_j} = \{0\}$.

Soit $x \in E_{\lambda_{p+1}} \cap \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$. Donc, $x \in E_{\lambda_{p+1}}$ et il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times \ldots \times E_{\lambda_p}$ tel que

$$x = x_1 + \ldots + x_p \qquad (\mathrm{I}).$$

En prenant l'image des deux membres par f, on obtient

$$\lambda_{p+1} x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p \qquad (\mathrm{II}).$$

Puis $(\mathrm{II}) - \lambda_{p+1}(\mathrm{I})$ fournit

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\, x_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{(\lambda_p - \lambda_{p+1})\, x_p}_{\in E_{\lambda_p}} = 0.$$

Puisque la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe, on en déduit que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i = 0$ et donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = 0$ car $\lambda_i - \lambda_{p+1} \neq 0$. Mais alors, (I) fournit $x = 0$.

Ceci montre que $E_{\lambda_{p+1}} \cap \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = \{0\}$ puis que $\forall i \in [\![2, p+1]\!]$, $E_{\lambda_i} \cap \displaystyle\sum_{j<i} E_{\lambda_j} = \{0\}$ et finalement que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}$ est directe.

Le résultat est démontré par récurrence.

IV - Endomorphismes ou matrices diagonalisables

1) Définition

On commence par la définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension quelconque non nulle.

Définition 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis f un endomorphisme de E.
f est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Exemple 1. Une homothètie $(f = \lambda \mathrm{Id}_E)$ est diagonalisable car toute base de E est constituée de vecteurs propres de f $(\forall x \neq 0,\ f(x) = \lambda.x)$. ❑

Exemple 2. Considérons $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$. f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. De plus, $f(1) = 0 = 0.1$ et pour $n \geqslant 1$, $f(X^n) = n.X^n$. Donc, la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ constituée de vecteurs propres de f. On en déduit que f est diagonalisable. ❑

On donne ensuite la définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension finie non nulle et d'une matrice diagonalisable.

DÉFINITION 12.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis f un endomorphisme de E.
f est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est **diagonalisable** si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

Les formules de changement de base fournissent immédiatement :

Théorème 30. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $\mathscr{B}$ une base de E.
Soient f un endomorphisme de E puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors,

f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exemple 1. Une matrice diagonale est diagonalisable (car semblable à elle-même).

Exemple 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0\}$ et de E puis G un supplémentaire de F dans E.
On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Pour tout vecteur x de F, on a $p(x) = x = 1.x$ et $s(x) = x = 1.x$ et pour tout vecteur x de G, on a $p(x) = 0 = 0.x$ et $s(x) = -x = (-1).x$. Donc, $\mathscr{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de p ou de s. On en déduit que p et s sont des endomorphismes diagonalisables.
On note que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \text{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \text{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$. ❑

2) Premières caractérisations de la diagonalisabilité en dimension finie

Théorème 31. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis f un endomorphisme de E.

f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f.

Démonstration. On sait déjà que si f admet au moins une valeur propre, alors f admet un nombre fini de valeurs propres deux à deux distinctes et que la somme des sous-espaces propres de f est directe.

• Supposons que E soient somme directe des sous-espaces propres de f (ce qui suppose implicitement que f admet au moins une valeur propre puisque $\dim(E) \geqslant 1$). Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f ($p \leqslant n = \dim(E)$). Une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f (car chaque vecteur de $\mathscr{B}$ est un vecteur non nul d'un sous-espace propre de f). Donc, f est diagonalisable.

• Supposons que f soit diagonalisable (ce qui suppose implicitement que f admet au moins une valeur propre). Soit $\mathscr{B}$ une base de E constituée de vecteurs propres de f. On regroupe alors les vecteurs de $\mathscr{B}$ associés à une même valeur propre et on obtient une base $\mathscr{B}' = \left(e_{1,1}, \ldots, e_{n_1,1}, \ldots, e_{1,q}, \ldots, e_{n_q,q}\right)$ où $e_{i,j}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre μ_j et où $\mu_1, \ldots, \mu_q$, $(1 \leqslant q \leqslant p)$, sont des valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Pour $j \in [\![1, q]\!]$, on pose $F_j = \text{Vect}\left(e_{1,j}, \ldots, e_{n_j,j}\right)$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de E, on sait que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_q$. D'autre part, les vecteurs d'une base de F_j sont des vecteurs propres de f associés à une même valeur propre. Donc chaque F_j est contenu dans un E_{λ_k} et deux F_j distincts sont contenus dans deux E_λ distincts. On en déduit que

$$E = \sum_{j=1}^{q} F_j \subset \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i},$$

puis que $E = \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ et enfin que $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}$ (on note alors que $q = p$, que $\mu_1, \ldots, \mu_q$ sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et que $F_1, \ldots, F_q$ sont $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$).

Théorème 32. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle puis f un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$. Alors

$$f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \sum_{i=1}^{p} n_i = n.$$

Démonstration. D'après le théorème précédent et le théorème 15, page 7,

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i} \Leftrightarrow n = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Une conséquence importante du théorème précédent est :

Théorème 33. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle puis f un endomorphisme de E.

Si f a n valeurs propres deux à deux distinctes, **alors** f est diagonalisable. De plus, dans ce cas, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Démonstration. On reprend les notations du théorème précédent. Si f a n valeurs propres deux à deux distinctes, alors $n \leqslant p \leqslant n$ et donc $p = n$. D'autre part, chaque E_{λ_i} est par définition non nul et donc chaque n_i est supérieur ou égal à 1. Par suite,

$$n \geqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{p} n_i = \sum_{i=1}^{n} n_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Ceci montre tout à la fois que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i = n$ et donc que f est diagonalisable et aussi que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $n_i = 1$.

V - Polynôme caractéristique

1) Polynôme caractéristique d'une matrice

Dans la démonstration du théorème 24, page 15, on a écrit : $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Ce faisant, nous avons fait apparaître un polynôme (le polynôme $z \mapsto \det(f - z\mathrm{Id}_E)$) dont les racines sont les valeurs propres de f. Ce polynôme a un défaut : son coefficient dominant est $(-1)^n$ et il n'est pas unitaire. On adopte donc la définition suivante :

Définition 13. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le **polynôme caractéristique** de la matrice A est $\chi_A = \det(XI_n - A)$ (ou $P_A = \det(XI_n - A)$).

Commentaire. Il est clair que $\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & X - a_{n,n} \end{vmatrix}$ est un polynôme. ❏

Exemple. Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors immédiatement $\chi_A = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$. ❏

On a immédiatement :

Théorème 34. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

Commentaire. Les racines du polynôme caractéristique de la matrice A sont les valeurs propres de A. En particulier, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux. ❏

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ puis, en développant suivant la dernière ligne,

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & 4 \\ -4 & X+2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\left[(X-3)(X+2)+4\right] = (X-2)(X^2-X-2) = (X-2)(X+1)(X-2)$$
$$= (X-1)(X-2)^2.$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

2) Ordre de multiplicité d'une valeur propre

DÉFINITION 14. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ puis $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A.
L'**ordre de multiplicité** de la valeur propre λ est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de A.

Si λ est racine simple de χ_A, on dit que λ est valeur propre simple de A.
Si λ est racine double de χ_A, on dit que λ est valeur propre double de A ...
Si λ est racine d'ordre au moins égal à 2 de χ_A, on dit que λ est valeur propre multiple de A.

Commentaire 1. Par convention, une valeur propre d'ordre 0 n'est pas une valeur propre de A. ❑

Commentaire 2. Une valeur propre donnée d'une matrice A peut donc « être valeur propre plusieurs fois ». La définition du spectre d'une matrice (définition 9, page 12) est devenue insuffisante devant cette nouvelle situation. Par exemple, on a vu que si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. Quand on lit $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$, on ne voit pas que le nombre 2 est valeur propre double de A. On a deux manières de pallier à cette difficulté. La première est d'écrire $\mathrm{Sp}\{1(1); 2(2)\}$ en précisant entre parenthèses l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre. Cette notation peut s'avérer pénible à lire dans certaines situations. La deuxième est de ne plus parler de l'**ensemble** des valeurs propres mais plutôt de la **famille** des valeurs propres. Dans ce cas, on écrira $\mathrm{Sp}(f) = (1, 2, 2)$. Dorénavant, la plupart du temps, le mot spectre désignera la famille des valeurs propres et de toute façon, on précisera toujours explicitement quelle est la signification adoptée. ❑

3) Degré et coefficients du polynôme caractéristique

Tout d'abord, χ_A est un polynôme **unitaire, de degré** n :

Théorème 35. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\deg(\chi_A) = n \text{ et } \mathrm{dom}(\chi_A) = 1.$$

Démonstration. Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $XI_n - A = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\alpha_{i,j} = \begin{cases} X - a_{i,i} \text{ si } i = j \\ -a_{i,j} \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

En développant complètement $\det(XI_n - A)$, on obtient $\chi_A = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1} \ldots \alpha_{\sigma(n),n}$. Chacun des $n!$ termes de cette somme est un produit de n polynômes de degré inférieur ou égal à 1 et donc chacun des $n!$ termes de la somme est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Ceci montre que $\deg(\chi_A) \leqslant n$.
De plus, un terme $\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1} \ldots \alpha_{\sigma(n),n}$ est de degré n exactement si et seulement si chaque facteur est de degré 1 exactement. Ceci est équivalent au fait que $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \chi_A &= (X - a_{1,1}) \ldots (X - a_{n,n}) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= X^n + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1. \end{aligned}$$

On a montré que χ_A est un polynôme unitaire, de degré n.

Une conséquence importante de ce théorème est :

Théorème 36. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A admet au plus n valeurs propres (en tenant compte de l'ordre de multiplicité).

Si de plus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, alors A admet exactement n valeurs propres (en tenant compte de l'ordre de multiplicité).

Commentaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou bien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, on peut écrire ou bien

$$\chi_A = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n)$$

où λ_1, …, λ_n, sont les valeurs propres de A distinctes ou confondues, ou bien

$$\chi_A = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}\dots(X-\lambda_p)^{\alpha_p},$$

où cette fois-ci, λ_1, …, λ_p, sont les valeurs propres deux à deux distinctes de A et α_1, …, α_p, les ordres de multiplicité respectifs de ces valeurs propres. ❏

Continuons à analyser les coefficients du polynôme caractéristique.

Théorème 37. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\chi_A = X^n - (\text{Tr}(A))\,X^{n-1} + \dots + (-1)^n\det(A).$$

En particulier,

Théorème 38. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\chi_A = X^2 - (\text{Tr}(A))\,X + \det(A).$$

Démonstration du théorème 37. Le coefficient constant de χ_A est sa valeur en 0. Puisque $\chi_A = \det(XI_n - A)$, le coefficient constant de χ_A est $\det(-A)$ ou encore $(-1)^n\det(A)$.

Pour le coefficient de X^{n-1}, reprenons la démonstration du théorème 34. Quand $\sigma \neq \text{Id}_{[\![1,n]\!]}$, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$. Posons $j = \sigma^{-1}(i)$ de sorte que $i = \sigma(j)$. j n'est pas i car sinon $i = \sigma(i)$ ce qui est faux. On ne peut pas non plus avoir $\sigma(j) = j$ car alors $j = \sigma(j) = i$ ce qui est faux. Mais alors, $\alpha_{\sigma(i),i} = -a_{\sigma(i),i}$ et $\alpha_{\sigma(j),j} = -a_{\sigma(j),j}$ (toujours avec les notations de la démonstration du théorème 34). Le terme

$$\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(i),i}\dots\alpha_{\sigma(j),j}\dots\alpha_{\sigma(n),n}$$

est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$. Il reste

$$\begin{aligned}\chi_A &= (X-a_{1,1})\dots(X-a_{n,n}) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-2\\ &= X^n - (a_{1,1}+\dots+a_{n,n})\,X^{n-1} + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-2\\ &= X^n - (\text{Tr}(A))\,X^{n-1} + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-2.\end{aligned}$$

On fait maintenant le lien entre les coefficients du polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice. Dans le théorème qui suit A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ (étant entendu qu'une matrice à coefficients réels est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) de sorte que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k).$$

On pose $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k$, $\sigma_n = \prod_{k=1}^{n}\lambda_k$ et plus généralement, pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}.$$

Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé fournissent immédiatement :

Théorème 39. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\chi_A = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^k\sigma_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n\sigma_n.$$

En particulier,

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \text{ et } \det(A) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n.$$

Ainsi,

la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité

et

le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 1 est valeur propre de A car $\text{rg}\,(A - I_3) = 1 < 3$ et 4 est valeur propre de A car $\text{rg}\,(A - 4I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$, la somme des colonnes de la matrice $A - 4I_3$ étant nulle. On a donc deviné deux valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$. La dernière valeur propre λ de A est fournie par la trace de A :

$$1 + 4 + \lambda = \text{Tr}(A) = 6$$

et donc $\lambda = 1$. Ainsi, $\text{Sp}(A) = (1, 1, 4)$ ou encore $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$. ❏

Exercice 7. Soit $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Montrer que

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ valeur propre de } A^{-1}.$$

Solution 7. Puisque $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$, on sait que 0 n'est pas valeur propre de A.

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Si λ est une valeur propre de A, alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. En multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ à gauche, on obtient $\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X$. Puisque $X \neq 0$, ceci montre que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1}.

Réciproquement, si λ est une valeur propre de A^{-1}, alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. On a montré que

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ valeur propre de } A^{-1}.$$

Commentaire 1. La solution précédente peut être améliorée. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}A^{-1} \times AX = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \times \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X.$$

Ceci redémontre que λ est valeur propre de A si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} mais établit un résultat plus précis : si λ est valeur propre de A (et donc $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1}), alors

$$E_\lambda(A) = E_{\frac{1}{\lambda}}\left(A^{-1}\right)$$

où $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et $E_{\frac{1}{\lambda}}\left(A^{-1}\right)$ est le sous-espace propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. ❏

Commentaire 2. L'exercice 7 montre que $\text{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \text{Sp}(A)\right\}$ ou encore l'exercice 7 fournit l'**ensemble** des valeurs propres de A^{-1}. Mais cet exercice ne dit rien de l'ordre multiplicité de chaque valeur propre. L'exercice suivant précise le résultat en fournissant la **famille** des valeurs propres de A^{-1}. ❏

Exercice 8. Soit $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction du polynôme caractéristique de A. En déduire que

$$\text{si } \text{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \text{ alors } \text{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Solution 8. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

$$\chi_{A^{-1}} = \det\left(XI_n - A^{-1}\right) = \det\left(-XA^{-1}\left(\frac{1}{X}I_n - A\right)\right) = \frac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A\left(\frac{1}{X}\right).$$

Supposons de plus que $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\begin{aligned}\chi_{A^{-1}} &= \frac{(-X)^n}{\lambda_1 \ldots \lambda_n}\left(\frac{1}{X} - \lambda_1\right)\ldots\left(\frac{1}{X} - \lambda_n\right) = \left(-\frac{X}{\lambda_1}\left(\frac{1}{X} - \lambda_1\right)\right)\ldots\left(-\frac{X}{\lambda_n}\left(\frac{1}{X} - \lambda_n\right)\right)\\ &= \left(X - \frac{1}{\lambda_1}\right)\ldots\left(X - \frac{1}{\lambda_n}\right).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

---

4) Propriétés du polynôme caractéristique

Théorème 40. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{{}^tA} = \chi_A$.

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\chi_{{}^tA} = \det\left(XI_n - {}^tA\right) = \det\left({}^t\left(XI_n - A\right)\right) = \det\left(XI_n - A\right) = \chi_A.$$

Théorème 41. $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Démonstration. Soit $(A, B) \in (\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

• Supposons tout d'abord A inversible. Puisque deux matrices semblables ont même déterminant, on peut écrire

$$\begin{aligned}\chi_{AB} &= \det\left(XI_n - AB\right) = \det\left(A^{-1}\left(XI_n - AB\right)A\right) = \det\left(XI_n - BA\right)\\ &= \chi_{BA}.\end{aligned}$$

• Supposons maintenant A non inversible. La matrice $A - xI_n$ est inversible sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x à savoir quand x est une valeur propre de A. Donc, pour tout x sauf peut-être un nombre fini,

$$\det\left(XI_n - \left(A - xI_n\right)B\right) = \det\left(XI_n - B\left(A - xI_n\right)\right).$$

Les deux expressions ci-dessus sont deux polynômes en x qui coïncident en une infinité de valeurs de x. Ces deux polynômes sont donc égaux et en particulier, ces deux polynômes prennent la même valeur en 0. Quand $x = 0$, on obtient de nouveau $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Théorème 42. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration. Soit $(A, B, P) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

$$\chi_B = \chi_{P^{-1}(AP)} = \chi_{(AP)P^{-1}} = \chi_A.$$

Commentaire. Dire que deux matrices ont même polynôme caractéristique revient à dire que ces deux matrices ont même **famille** de valeurs propres ou encore ont mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité. ❑

Deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, alors A et B ont même polynôme caractéristique à savoir $(X-1)^2$. Pourtant, ces deux matrices ne sont pas semblables car une matrice semblable à I_2 est égale à I_2 (et A n'est pas égale à I_2).

5) *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme*

Définition 15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis f un endomorphisme de E.
Le **polynôme caractéristique** de f est $\chi_f = \det(X\mathrm{Id}_E - f)$ (ou $P_f = \det(X\mathrm{Id}_E - f)$).

Le polynôme caractéristique de f est donc le déterminant de $XI_n - A$ ou encore χ_A où A est la matrice de f dans une base donnée. Ce résultat ne dépend pas du choix d'une base ou encore si B est la matrice de f dans une autre base, alors $\chi_A = \chi_B$ puisque deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Exemple. Si f est l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ ou encore si $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, alors la matrice de f dans une base donnée de E est λI_n. On en déduit que

$$\chi_f = \chi_{\lambda I_n} = (X - \lambda)^n.$$

❏

Exercice 9. Trouver le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Solution 9. Soit f un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. On a vu dans l'exercice 1, page 13, que 0 est l'unique valeur propre de f ou encore la famille des valeurs propres de f est $(0, \dots, 0)$. On en déduit que

$$\chi_f = X^n.$$

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient F et G deux sous-espaces de E supplémentaires dans E. Soient p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Déterminer χ_p et χ_s.

Solution 10. Notons r la dimension de F (et donc $\dim(G) = n - r$). Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \mathrm{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}\right)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \mathrm{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-r}\right)$. Donc,

$$\chi_p = (X-1)^r X^{n-r} \quad \text{et} \quad \chi_s = (X-1)^r (X+1)^{n-r}.$$

VI - Diagonalisation

1) *Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité*

Dans ce qui suit suit, l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ sera noté $o(\lambda)$.

Théorème 43.

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit λ une (éventuelle) valeur propre de f. Alors,

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant o(\lambda).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une (éventuelle) valeur propre de A. Alors,

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant o(\lambda).$$

Démonstration. Notons p la dimension de $E_\lambda(f)$. Par définition d'une valeur propre, $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ et donc $p \geqslant 1$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_λ que l'on complète éventuellement en $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs fournit alors

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \det\begin{pmatrix} (X-\lambda)I_p & -C \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{pmatrix} = (X-\lambda)^p \chi_B.$$

On en déduit que $o(\lambda) \geqslant p$.

Commentaire 1. On peut se demander si la démonstration précédente n'a pas en fait permis d'établir que $o(\lambda) = p$. Ce n'est pas le cas car λ peut encore être racine de χ_B. Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. 1 est donc valeur propre d'ordre 2. Maintenant, d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Donc, $\dim(E_1(A)) = 1 < 2$. Si on n'est toujours pas convaincu, on peut déterminer explicitement $E_1(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z = x \\ y = y \\ 2z = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Donc, $E_1(A)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ❏

Commentaire 2. Le théorème 42 fournit un encadrement de la dimension d'un sous-espace propre. Par exemple, si $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est 1 ou 2. Mais lu en sens inverse, le théorème 42 fournit une minoration de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre :

$$o(\lambda) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)).$$

Ce résultat est fréquemment utilisé dans la pratique quand la dimension de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ peut être obtenue rapidement sans déterminer explicitement le noyau de la matrice $A - \lambda I_n$ par le théorème du rang :

$$o(\lambda) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$

C'est ce résultat qu'on utilise dans l'exercice suivant. ❏

Exercice 11. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$.

A quelle condition nécessaire et suffisante la matrice A est-elle inversible ?

Solution 11. $\mathrm{rg}(A - (a-b)I_n) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & \ldots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \ldots & b \end{pmatrix} \leqslant 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(A - (a-b)I_n)) \geqslant n - 1 > 0$. Ceci montre que $a - b$ est valeur propre de la matrice A et que l' ordre de multiplicité de $a - b$ vérifie

$$o(a-b) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(A - (a-b)I_n)) \geqslant n - 1.$$

On vient donc de trouver $n-1$ des n valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$. La dernière valeur propre λ de A est fournie par la trace de A :

$$na = \mathrm{Tr}(A) = \underbrace{(a-b) + \ldots + (a-b)}_{n-1} + \lambda$$

et donc $\lambda = na - (n-1)(a-b) = a + (n-1)b$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \left(\underbrace{(a-b), \ldots, (a-b)}_{n-1}, a + (n-1)b\right)$ puis

$$\boxed{\chi_A = (X-(a-b))^{n-1}(X-(a+(n-1)b)).}$$

En particulier,

$$A \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(0) \neq 0 \Leftrightarrow (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \text{ et } a \neq -(n-1)b.$$

Une conséquence immédiate du théorème 43 est :

Théorème 44.

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit λ une (éventuelle) valeur propre simple de f. Alors, $\dim(E_\lambda(f)) = 1$.
• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une (éventuelle) valeur propre simple de A. Alors, $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.

Commentaire. Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours une droite vectorielle. ❏

Théorème 45. (une condition nécessaire et suffisante de diagonalisablité)

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

Démonstration.

• Supposons que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$ et que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre soit égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.
Posons $\chi_f = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f et les α_i sont leurs ordres de multiplicité respectifs.
Pour $i \in [\![1,p]\!]$, posons encore $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$. Par hypothèse, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\alpha_i = n_i$. Mais alors,

$$n = \deg(\chi_f) = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Le théorème 32, page 21, permet d'affirmer que f est diagonalisable.

• Supposons que f soit diagonalisable. E est donc somme directe des sous-espaces propres de F :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, posons $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$. Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}$, la matrice de f est

$$D = \mathrm{diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{n_p}\right).$$

Mais alors, $\chi_f = \chi_D = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{n_i}$. En particulier, χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

Théorème 46. (une condition suffisante de diagonalisablité)

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. **Si** f a n valeurs propres simples, **alors** f est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** A a n valeurs propres simples, **alors** A est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles.

Démonstration. Si f a n valeurs propres simples, alors en particulier χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Le théorème 44 permet d'affirmer que les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles. En particulier, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de f est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. Donc f est diagonalisable.

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2(X-4)$. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. A admet 4 pour valeur propre simple et 0 pour valeur propre double. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est obligatoirement une droite vectorielle. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 ou 2.
$\mathrm{rg}(A) = 2$ et donc $\dim(E_0) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1 < 2$. La matrice A n'est pas diagonalisable. ❑

Exemple 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2 + 1$. χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Donc, la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Par contre, $\chi_A = (X-i)(X+i)$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples. Donc, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.❑

Exercice 12. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) ?

Solution 12. $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$. En particulier, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 2 \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_4)) = 2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - I_4) = 4 - 2 \text{ et } \mathrm{rg}(A - 2I_4) = 4 - 2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - I_4) = 2 \text{ et } \mathrm{rg}(A - 2I_4) = 2. \end{aligned}$$

• $\mathrm{rg}(A - I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $a = 0$, $\mathrm{rg}(A - I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \\ 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ car $\begin{vmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Si $a \neq 0$, $\mathrm{rg}(A - I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ et en particulier, $\mathrm{rg}(A - I_4) \neq 2$.

Donc, $\mathrm{rg}(A - I_4) = 2 \Leftrightarrow a = 0$.

• $\mathrm{rg}(A - 2I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

Si $f = 0$, $\mathrm{rg}(A - 2I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \end{pmatrix} = 2$ car $\begin{vmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Si $f \neq 0$, $\mathrm{rg}(A - I_4) \geqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & c \\ 0 & -1 & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = 3$ et en particulier, $\mathrm{rg}(A - 2I_4) \neq 2$.

Donc, $\mathrm{rg}(A - 2I_4) = 2 \Leftrightarrow f = 0$.

En résumé,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow a = f = 0.}$$

---

2) *Diagonalisation explicite*

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Dire que A est diagonalisable équivaut à dire qu'il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P \times D \times P^{-1}$.

Diagonaliser la matrice diagonalisable A, c'est trouver explicitement D, P et P^{-1}.

Les matrices A et D sont semblables. Donc, $\chi_D = \chi_A$ et le spectre $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de D est encore le spectre de A. Pour comprendre la matrice P, introduisons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A et notons $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Dire que A est diagonalisable équivaut à dire que f est diagonalisable. Donc, il existe $\mathscr{B} = (e'_1, \dots, e'_n)$ base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de f. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées aux vecteurs de $\mathscr{B}$ (donc, λ_1 est valeur propre associée à e'_1, ..., λ_n est valeur propre associée à e'_n).

Par construction, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e'_i) = \lambda_i e'_i$ et donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$. Si on note P la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$, les formules de changement de bases fournissent

$$A = P \times D \times P^{-1}.$$

Les colonnes de P « sont » donc les vecteurs e'_1, ...,e'_n. Si on s'exprime uniquement avec un vocabulaire matriciel, alors les colonnes C_1, ..., C_n de P forment une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A. Plus précisément, si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, C_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1, ..., C_n est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_n.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X-6 & -2 & 0 \\ -2 & X-3 & 0 \\ 10 & 5 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\left[(X-6)(X-3)-4\right] = (X-1)\left(X^2-9X+14\right) \\ &= (X-1)(X-2)(X-7).\end{aligned}$$

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Détermination de $E_2(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -10 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+2y=0 \\ 2x+y=0 \\ -10x-5y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=-10x-5(-2x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc, $E_2(A) = \text{Vect}(e'_1)$ où $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Détermination de $E_7(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in E_7(A) &\Leftrightarrow (A - 7I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -10 & -5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+2y=0 \\ 2x-4y=0 \\ -10x-5y-6z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2y \\ z=-\dfrac{25}{6}y \end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc, $E_7(A) = \text{Vect}(e'_2)$ où $e'_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Détermination de $E_1(A)$. $E_1(A)$ est une droite vectorielle. La troisième colonne de A nous donne $Ae_3 = e_3$ et donc immédiatement $E_1(A) = \text{Vect}(e'_3)$ où $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$.

Donc, $A = P \times D \times P^{-1}$ où $D = \text{diag}(2,7,1)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & -25 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcul de P^{-1}. On sait que si $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$, alors $P^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} e'_1 = e_1 - 2e_2 \\ e'_2 = 12e_1 + 6e_2 - 25e_3 \\ e'_3 = e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_3 = e'_3 \\ e_1 - 2e_2 = e'_1 \\ 12e_1 + 6e_2 = e'_2 + 25e'_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_3 = e'_3 \\ e_1 = \dfrac{1}{15}(3e'_1 + e'_2 + 25e'_3) \\ e_2 = \dfrac{1}{30}(-12e'_1 + e'_2 + 25e'_3) \end{array}\right.$$

Donc, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A = P \times D \times P^{-1} \text{ où } D = \text{diag}(2,7,1),\ P = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & -25 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}.}$$

On peut alors utiliser cette décomposition par exemple pour calculer les puissances successives de A car $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ ... ❑

VII - Endomorphismes ou matrices trigonalisables

On a vu dans les paragraphes précédents qu'une matrice prise au hasard n'est pas nécessairement diagonalisable. On va voir dans cette section que par contre, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire.

1) Définition

DÉFINITION 15.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis f un endomorphisme de E.
f est trigonalisable (ou triangulable) si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est trigonalisable (ou triangulable) si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Commentaire 1. Il est clair que f est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base est trigonalisable. ❑

Commentaire 2. D'après le théorème 10, page 4, toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure. Dans la définition précédente, on aurait pu remplacer « triangulaire supérieure » par « triangulaire inférieure ». ❑

Commentaire 3. Une matrice triangulaire, inférieure ou supérieure, est trigonalisable. ❑

2) Une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

Théorème 47. (une condition nécessaire et suffisante de trigonalisablité)

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

En particulier,

Théorème 48.

• Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle est trigonalisable.

• Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

Démonstration du théorème 47.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable, il existe $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ tels que $A = P \times T \times P^{-1}$. En posant $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

Puisque les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont dans $\mathbb{K}$, ceci montre que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

• Montrons la réciproque du résultat précédent par récurrence sur $n \geqslant 1$.

- Si $n = 1$, tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire et donc trigonalisable.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ soit trigonalisable (dans $\mathbb{K}$).

Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à A. On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. En particulier, A admet au moins une valeur propre λ_1 dans $\mathbb{K}$. λ_1 est encore une valeur propre de f. On note e_1 un vecteur propre associé.
e_1 est un vecteur non nul et donc la famille (e_1) est libre. On peut compléter cette famille en une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.
La matrice de f dans la base $\mathscr{B}_1$ s'écrit sous la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K}),$$

où L est un élément de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Les formules de changement de base fournissent $P' \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $A = P'A'P'^{-1}$. Puisque les matrices A et A' sont semblables, $\chi_A = \chi_{A'}$. Un calcul par blocs fournit

$$\chi_A = \chi_{A'} = (X - \lambda_1) \det(XI_n - A_1) = (X - \lambda_1)\chi_{A_1}.$$

Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, on peut poser $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_{n+1})$ où les λ_i sont dans $\mathbb{K}$. Il vient $(X - \lambda_1)\chi_{A_1} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_{n+1})$ et donc

$$\chi_{A_1} = (X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_{n+1}).$$

Ainsi, A_1 est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $P_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T_1 \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ telles que $A_1 = P_1T_1P^{-1}$. Soit $P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

Puisque $\det(P'') = 1 \times \det(P_1) \neq 0$, la matrice P'' est inversible. Un calcul par blocs montre que $P''^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs fournit encore

$$P''^{-1}A'P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & L & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & L & \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1}A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LP_1 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1}A_1P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LP_1 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Posons $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LP_1 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $P = P'P''$. P est un élément de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$, T est un élément de $\mathscr{T}_{n+1,s}(\mathbb{K})$ et

$$P^{-1}AP = P''^{-1}P'^{-1}AP'P'' = P''^{-1}A'P'' = T.$$

La matrice A est donc trigonalisable.

Le résultat est démontré par récurrence.

Commentaire. Quand on a triangulé et donc écrit A sous la forme $A = PTP^{-1}$, on retrouve sur la diagonale de T la famille des valeurs propres de A (puisque T et A ont même polynôme caractéristique). ❏

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X-6 & 6 & -5 \\ -14 & X+13 & -10 \\ -7 & 6 & X-4 \end{vmatrix} = (X-6)(X^2+9X+8) + 14(6X+6) - 7(5X+5) \\ &= (X-6)(X+1)(X+8) + 49(X+1) = (X+1)\left(X^2+2X+1\right) \\ &= (X+1)^3.\end{aligned}$$

-1 est valeur propre triple de A mais

$$\dim(\operatorname{Ker}(A+I_3)) = 3 - \operatorname{rg}(A+I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 < 3.$$

Donc, A n'est pas diagonalisable (on aurait aussi pu constater que si A était diagonalisable, A serait semblable à $\operatorname{diag}(-1,-1,-1) = -I_3$ et donc égale à $-I_3$ ce qui n'est pas). Néanmoins, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Notons f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A puis $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\operatorname{Ker}(f + Id_E)$ est un plan vectoriel. Notons (e_1', e_2') une base de ce plan puis complétons cette famille libre en $\mathscr{B} = (e_1', e_2', e_3')$ base de $\mathbb{R}^3$. Notons P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$. Sans aucun calcul supplémentaire, on peut affirmer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \times \\ 0 & -1 & \times \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Achevons les calculs. $\operatorname{Ker}(f + Id_E)$ est le plan vectoriel d'équation $7x - 6y + 5z = 0$. On peut prendre $e_1' = (6, 7, 0)$ et $e_2' = (0, 5, 6)$. On pose $e_3' = (0, 0, 1) = e_3$ puis

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(P) = 30 \neq 0$, (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, par construction, $Ae'_1 = -e'_1$, $Ae'_2 = -e'_2$ et enfin, la dernière colonne de $A + I_3$ fournit

$$(A + I_3)\, e'_3 = 5e_1 + 10e_2 + 5e_3 = \frac{5}{6}(6e_1 + 7e_2) + \frac{5}{6}(5e_2 + 6e_3) = \frac{5}{6}e'_1 + \frac{5}{6}e'_2,$$

et donc $Ae'_3 = \frac{5}{6}e'_1 + \frac{5}{6}e'_2 - e'_3$. Par suite, si $P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5/6 \\ 0 & -1 & 5/6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

❏

3) Quelques conséquences

Théorème 49.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Sp}\left(A^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right).$$

- Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Sp}\left(A^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right).$$

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Mais alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est semblable à T^k. Le théorème 12, page 5, fournit alors

$$\mathrm{Sp}\left(A^k\right) = \mathrm{Sp}\left(T^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right).$$

Si de plus, $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors 0 n'est pas valeur propre de A et ce qui reste précède est vrai quand $k \in \mathbb{Z}$.

Une conséquence du théorème 49 est

Théorème 50.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k.$$

- Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k.$$

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$. Déterminer les valeurs propres de A.

Solution 13. Les colonnes $C_2, \ldots, C_{n-1}$, de la matrice A sont colinéaires à la colonne C_1. Donc, $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ puis, grâce au théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant n - 2 > 0$. 0 est donc une valeur propre de A et son ordre de multiplicité est au moins $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ et donc au moins $n - 2$. Il manque deux valeurs propres λ et μ.

On obtient une première équation avec la trace de A :

$$0 + \ldots + 0 + \lambda + \mu = \mathrm{Tr}(A) = n$$

et donc $\lambda+\mu=n$. Une deuxième équation est fournie par $\text{Tr}\left(A^2\right)$:

$$0^2+\ldots+0^2+\lambda^2+\mu^2=\text{Tr}\left(A^2\right)=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right),$$

et donc $\lambda^2+\mu^2=2\times\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n^2=\dfrac{n[(n-1)(2n-1)+3n]}{3}=\dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3}$. Ensuite,

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=n\\ \lambda^2+\mu^2=\dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=n\\ (\lambda+\mu)^2-2\lambda\mu=\dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=n\\ \lambda\mu=\dfrac{1}{2}\left(n^2-\dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3}\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=n\\ \lambda\mu=-\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \lambda \text{ et } \mu \text{ sont les solutions de l'équation } X^2-nX-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=0\ (E).$$

Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=n^2+4\times\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\dfrac{3n^2+2n(n-1)(2n-1)}{3}=\dfrac{n\left(4n^2-3n+2\right)}{3}$.
On en déduit que

$$\boxed{\text{Sp}(A)=\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2},\frac{1}{2}\left(n-\sqrt{\frac{n\left(4n^2-3n+2\right)}{3}}\right),\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{\frac{n\left(4n^2-3n+2\right)}{3}}\right)\right).}$$

Commentaire. Dans l'exercice précédent, il nous manquait deux valeurs propres λ et μ. Il nous fallait donc deux équations. Une fois écrit $\lambda+\mu=\text{Tr}(A)=n$, on pouvait avoir envie d'utiliser le déterminant de A. Malheureusement, ce déterminant ne sert à rien car il est nul (l'équation obtenue est $0\times\lambda\times\mu=0$). ❏

VIII - Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices

1) L'algèbre des polynômes en f (ou en A)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme de E. Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$ (on n'a pas nécessairement $a_p\neq 0$). On définit l'endomorphisme $P(f)$ par

$$P(f)=\sum_{k=0}^{p}a_kf^k=a_0\text{Id}_E+a_1f+\ldots+a_pf^p.$$

On note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des $P(f)$ où P est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

De même, si A est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$P(A)=\sum_{k=0}^{p}a_kA^k=a_0I_n+a_1A+\ldots+a_pA^p.$$

Théorème 51.

- Soit E un $\mathscr{K}$-espace vectoriel puis $f\in\mathscr{L}(E)$.
  $\forall(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2,\ (P+Q)(f)=P(f)+Q(f)$;
  $\forall P\in\mathbb{K}[X],\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ (\lambda P)(f)=\lambda P(f)$;
  $\forall(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2,\ (P\times Q)(f)=P(f)\circ Q(f)$.
- Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathscr{K})$.
  $\forall(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2,\ (P+Q)(A)=P(A)+Q(A)$;
  $\forall P\in\mathbb{K}[X],\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ (\lambda P)(A)=\lambda P(A)$;
  $\forall(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2,\ (P\times Q)(A)=P(A)\times Q(A)$.

Démonstration. On montre les différents résultats pour un endomorphisme f.

• Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres nulles, à partir d'un certain rang. Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. Alors

$$(P+Q)(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) f^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k f^k = P(f) + Q(f).$$

• Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres, nulle à partir d'un certain rang. Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$(\lambda P)(f) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k = \lambda P(f).$$

• Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres nulles à partir d'un certain rang. Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. Alors

$$(P \times Q)(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) f^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k \right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k f^k \right) = P(f) \circ Q(f).$$

Commentaire. Par exemple, si $P = (X-1)^2(X+2)$, alors

$$P(f) = \left(f - \mathrm{Id}_E\right)^2 \circ \left(f + 2\mathrm{Id}_E\right)$$

ou

$$P(A) = \left(A - I_n\right)^2 \times \left(A + 2I_n\right).$$

❏

Théorème 52.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$. De plus, l'application $\begin{array}{cccc} \varphi_f : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$. De plus, l'application $\begin{array}{cccc} \varphi_A : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P & \mapsto & P(A) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

Démonstration. On fait la démonstration pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

• Si P est le polynôme nul, alors $P(f) = 0$. Donc, l'endomorphisme nul de E est dans $\mathbb{K}[f]$.

• Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$\lambda P(f) + \mu Q(f) = (\lambda P + \mu Q)(f) \in \mathbb{K}[X].$$

Ceci montre déjà que $\mathbb{K}[f]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E), +, .)$.

• Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$P(f) \circ Q(f) = (P \times Q)(f) \in \mathbb{K}[f].$$

Ceci montre que $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

• Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$P(f) \circ Q(f) = (P \times Q)(f) = (Q \times P)(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Donc, $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

• Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\varphi_f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f) = \lambda \varphi_f(P) + \mu \varphi_f(Q),$$

et

$$\varphi_f(P \times Q) = (P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = \varphi_f(P) \circ \varphi_f(Q).$$

Donc, φ_f est un morphisme d'algèbres.

Commentaire. Un moment important dans la démonstration précédente est le fait que

deux polynômes en f commutent.

2) Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des endomorphismes (respectivement des matrices) qui commutent avec un endomorphisme donné (respectivement une matrice donnée). Il existe de nombreuses situations où savoir que deux endomorphismes commutent est important. Rappelons le binôme de Newton

$$(f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k g^{n-k},$$

que l'on peut utiliser uniquement quand f et g commutent. Rappelons aussi le théorème 19, page 9, qui dit que quand deux endomorphismes commutent, l'un des deux endomorphismes laisse stable l'image, le noyau et les sous-espaces propres de l'autre.

D'autre part, il est fréquent que l'on soit amené à chercher des matrices inconnues (ou des endomorphismes) parmi les matrices commutant avec une matrice donnée. L'exemple le plus simple est la recherche des « racines carrées » d'une matrice donnée. Si A est une matrice donnée, les matrices M (s'il en existe) vérifiant $M^2 = A$ commutent avec A car

$$M \times A = M \times M^2 = M^3 = M^2 \times M = A \times M.$$

Définition 16.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme de E.
Le **commutant** de f, noté $C(f)$, est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

$$C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E)/\ g \circ f = f \circ g\}.$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le **commutant** de A est l'ensemble des matrices carrées qui commutent avec A.

$$C(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})/\ B \times A = A \times B\}.$$

Exemple. Si $f = \lambda \mathrm{Id}_E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout g de $\mathscr{L}(E)$,

$$g \circ f = f \circ g = \lambda g.$$

Donc le commutant d'une homothétie est $\mathscr{L}(E)$ tout entier. De même, le commutant d'une matrice scalaire de format n est $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'exercice suivant montre que les matrices scalaires sont les seules matrices commutant avec toute matrice.❏

Exercice 14. Déterminer les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution 14. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A commutent avec toute matrice, alors A commute en particulier avec les matrices élémentaires $E_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Or, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l} \delta_{l,i} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} \\ &= \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{i,i} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ j\text{-ème colonne} & \end{array} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E_{i,j}A &= \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}\delta_{j,k}E_{i,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l} \\
&= \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
a_{j,1} & & a_{j,j} & & a_{j,n} \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\uparrow & \\
j\text{-ème colonne} &
\end{array}
\end{aligned}$$

Si de plus, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, alors $\forall k \neq l$, $a_{k,l} = 0$ et $\forall i \neq j$, $a_{i,i} = a_{j,j}$. Donc, A est nécessairement de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Réciproquement, les matrices scalaires commutent avec toute matrice.

Théorème 53.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. $C(f)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.

Démonstration. Montrons que $C(f)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

- $f \circ 0 = 0 \circ f = 0$ et donc $0 \in C(f)$. De plus, si $(g,h) \in (C(f))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors

$$(\lambda g + \mu h) \circ f = \lambda g \circ f + \mu h \circ f = \lambda f \circ g + \mu f \circ h = f \circ (\lambda g + \mu h)$$

et donc $\lambda g + \mu h \in C(f)$. Ceci montre déjà que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{L}(E), +, .)$.

- Vérifions que $C(f)$ est stable pour $\circ$. Soit $(g,h) \in (C(f))^2$.

$$(g \circ h) \circ f = g \circ h \circ f = g \circ f \circ h = f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Donc, $C(f)$ est stable pour $\circ$ et finalement $C(f)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

Il ne faut pas croire que deux éléments g et h de $C(f)$ commutent. On a nécessairement $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$, mais on peut avoir $g \circ h \neq h \circ g$.

Soit f est un endomorphisme donné. Puisque deux polynômes en f commutent, en particulier tout polynôme en f commute avec f ou encore

Théorème 54.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(C(f), +, ., \circ)$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(C(A), +, ., \times)$.

Exercice 15. (dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f puis $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$ les sous-espaces propres associés et enfin on note $n_1, \dots, n_p$ les dimensions respectives de ces sous-espace propres.

1) Montrer que : $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $g \in C(f) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]$, $g\left(E_{\lambda_i}(f)\right) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

2) En déduire que $\dim(C(f)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$.

3) Montrer que $\dim(C(f)) \geqslant n$ avec égalité si et seulement si f a n valeurs propres simples.

Solution 15.

1) Puisque f est diagonalisable, on a $\mathsf{E} = \mathsf{E}_{\lambda_1}(\mathsf{f}) \oplus \ldots \oplus \mathsf{E}_{\lambda_p}(\mathsf{f})$.

Soit $g \in \mathscr{L}(\mathsf{E})$.

Si $g \in \mathsf{C}(\mathsf{f})$, on sait que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $g\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}(\mathsf{f})\right) \subset \mathsf{E}_{\lambda_i}(\mathsf{f})$ (théorème 19, page 9).
Réciproquement, supposons que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $g\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}\right) \subset g\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}\right)$. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, notons f_i (resp. g_i) l'endomorphisme de $\mathsf{E}_{\lambda_i}(\mathsf{f}))$ induit par f (resp. g). Pour chaque $i \in [\![1,p]\!]$, f_i est l'homothétie de rapport λ_i. Mais alors, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, f_i et g_i commutent.

Les endomorphismes $g \circ f$ et $f \circ g$ coïncident sur des sous-espaces supplémentaires. On en déduit que $g \circ f = f \circ g$ ou encore que $g \in \mathsf{C}(\mathsf{f})$. On a montré que

$$g \in \mathsf{C}(\mathsf{f}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ g\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}\right) \subset g\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}\right).$$

2) Donc, $\mathsf{C}(\mathsf{f}) = \{g \in \mathscr{L}(\mathsf{E}) /\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ g\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}\right) \subset g\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}\right)\}$. Avec les notations de la question précédente, considérons

$$\begin{array}{cccc} \varphi\ : & \mathsf{C}(\mathsf{f}) & \rightarrow & \mathscr{L}\left(\mathsf{E}_{\lambda_1}(\mathsf{f})\right) \times \ldots \times \mathscr{L}\left(\mathsf{E}_{\lambda_p}(\mathsf{f})\right) \\ & g & \mapsto & (g_1, \ldots, g_p) \end{array}.$$

φ est bien une application d'après la question 1). φ est linéaire, injective car un endomorphisme est uniquement déterminé par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires, surjective d'après 1). Finalement, φ est un isomorphisme. On en déduit que

$$\dim(\mathsf{C}(\mathsf{f})) = \dim(\varphi(\mathsf{C}(\mathsf{f}))) = \dim\left(\prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}\left(\mathsf{E}_{\lambda_i}(\mathsf{f})\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2.$$

3) Chaque n_i est un entier supérieur ou égal à 1. Donc, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i^2 \geqslant n_i$. On en déduit que

$$\dim(\mathsf{C}(\mathsf{f})) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{p} n_i = n \text{ (car f est diagonalisable)}.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si chaque inégalité écrite est une égalité. Ceci équivaut à $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i^2 = n_i$ ou encore $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i = 1$.
Puisque f est diagonalisable, pour chaque i, n_i est l'ordre de multiplicité de λ_i. Donc,

$$\dim(\mathsf{C}(\mathsf{f})) = n \Leftrightarrow \text{les valeurs propres de f sont simples.}$$

Ceci impose en particulier $p = n$.

Exercice 16. (racines carrées d'une matrice de format 3 ayant 3 valeurs propres simples)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

Solution 16. Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$ alors $AX = X^3 = XA$ et donc X et A commutent.
A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de A sont des droites. X commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.
Ainsi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $D_0 = \text{diag}(3,4,1)$ alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où les solutions

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

---

3) Polynômes annulateurs d'un endomorphisme (ou d'une matrice)

Théorème 55.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(A) = 0$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme f. Notons I_f l'ensemble des polynômes P tels que $P(f) = 0$.

• Si P est le polynôme nul, alors $P(f) = 0$. Donc, le polynôme est dans I_f.
• Soit $(P, Q) \in (I_f)^2$. $(P - Q)(f) = P(f) - Q(f) = 0$ et donc $P - Q \in I_f$.
• Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times I_f$. $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = P(f) \circ 0 = 0$. Donc, $P \times Q \in I_f$.

On a montré que I_f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

---

4) Polynôme minimal d'un endomorphisme (ou d'une matrice)

Théorème 56.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Il existe au moins un polynôme non nul P tel que $P(f) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe au moins un polynôme non nul P tel que $P(A) = 0$.

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n.

$(\mathscr{L}(E), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie n^2. La famille $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ est une famille de cardinal $n^2 + 1 > \dim(\mathscr{L}(E))$.

La famille $\left(f^k\right)_{0 \leqslant n^2}$ est donc liée. Par suite, il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2} \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0$.

La polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est un polynôme non nul et annulateur de f.

Commentaire. Le théorème précédent fournit un polynôme non nul de degré au plus n^2 et annulateur de f. Nous améliorons plus loin ce résultat en fournissant un polynôme de degré n exactement et annulateur de f : le polynôme caractéristique de f. ❏

Théorème 57.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un polynôme unitaire P_0 et un seul tel que

$$\operatorname{Ker}(\varphi_f) = P_0 \times \mathbb{K}[X].$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un polynôme unitaire P_0 et un seul tel que

$$\operatorname{Ker}(\varphi_A) = P_0 \times \mathbb{K}[X].$$

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie.

D'après le théorème 55, $\text{Ker}\,(\varphi_f) = \{P \in \mathbb{K}[X]/\ P(f) = 0\}$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. D'après le théorème 56, $\text{Ker}\,(\varphi_f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. On sait alors qu'il existe un polynôme non nul et unitaire P_0, uniquement défini, tel que $\text{Ker}\,(\varphi_f)$.

Commentaire. L'hypothèse de dimension est essentielle. Considérons par exemple $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Supposons par l'absurde qu'il existe des nombres a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$ et $a_n \neq 0$. Alors,

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = 0.$$

En particulier, si $P = X^n$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} = 0 \quad (*).$$

Mais le coefficient constant du polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ est $a_n n!$. Ce coefficient n'est pas nul et donc l'égalité $(*)$ est fausse. Par suite, il n'existe pas de polynôme non nul et annulateur de f ou encore, ici,

$$\text{Ker}\,(\varphi_f) = \{0\}.$$

❑

Définition 17.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis f un endomorphisme de E. L'unique polynôme unitaire P_0 tel que $\text{Ker}\,(\varphi_f) = P_0 \times \mathbb{K}[X]$ s'appelle le **polynôme minimal** de f et se note μ_f (ou Q_f).

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.L'unique polynôme unitaire P_0 tel que $\text{Ker}\,(\varphi_A) = P_0 \times \mathbb{K}[X]$ s'appelle le **polynôme minimal** de A et se note μ_A (ou Q_A).

Commentaire 1. On notera μ_f le polynôme minimal si on note χ_f le polynôme caractéristique et on notera Q_f le polynôme minimal si on note P_f le polynôme caractéristique. ❑

Commentaire 2. D'après le théorème 57 et le commentaire qui le suit, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie et f un endomorphisme de E, il est possible que f n'admette pas de polynôme minimal. Par contre, si E est de dimension finie, f admet toujours un polynôme minimal. De même, une matrice carrée admet toujours un polynôme minimal. ❑

Commentaire 3. Soit μ_f le polynôme minimal de f (en cas d'existence). Par construction, on a les propriétés suivantes :

- μ_f est le polynôme **non nul** unitaire de plus bas degré et annulateur de f.
- Si P est un polynôme annulateur de f, alors μ_f divise P ou encore, il existe un polynôme Q tel que $P = \mu_f \times Q$. ❑

Exemple. Soit p une projection. On sait $p^2 = p$ ou encore le polynôme $P = X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de p. Le polynôme minimal de p est un diviseur unitaire de $X(X-1)$ et est donc 1 ou X ou $X-1$ ou $X(X-1)$.
Le polynôme 1 n'est jamais annulateur de p.
Le polynôme X est annulateur de p si et seulement si $p = 0$.
Le polynôme $X-1$ est annulateur de p si et seulement si $p = Id_E$ (on rappelle que 0 et Id_E sont des projections).
Dans tous les autres cas, 1, X et $X-1$ ne sont pas des polynômes annulateurs de p.

En résumé,

$$\text{si } p = 0,\ \mu_p = X, \text{ si } p = Id_E,\ \mu_p = X - 1 \text{ et si } p \neq 0 \text{ et } p \neq Id_E,\ \mu_p = X^2 - X.$$

De même, si s est une symétrie,

$$\mu_s = X - 1 \text{ si } s = Id_E,\ \mu_s = X + 1 \text{ si } s = -Id_E \text{ et } \mu_s = X^2 - 1 \text{ si } s \neq Id_E \text{ et } s \neq -Id_E.$$

❏

5) *Polynôme minimal et polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit*

Théorème 58.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient F un sous-espace vectoriel de E stable par f puis f_F l'endomorphisme de F induit par f. Alors

- χ_{f_F} divise χ_f ;
- μ_{f_F} divise μ_f.

Démonstration. Le résultat est immédiat si $F = \{0\}$ ou $F = E$. On suppose dorénavant que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$.

• Soit G un supplémentaire de F dans E. Soient $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $\mathscr{B}_2 = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Puisque F est stable par f, la matrice A de f dans $\mathscr{B}$ s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix},$$

où $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f_F)$. Mais alors, un calcul par blocs fournit

$$\chi_f = \chi_A = \begin{vmatrix} XI_p - B & -D \\ 0_{n-p,p} & XI_{n-p} - C \end{vmatrix} = \det(XI_p - B) \times \det(XI_{n-p} - C) = \chi_{f_F} \times \chi_C.$$

Ceci montre que χ_{f_F} divise χ_f.

• Puisque $\mu_f(f) = 0$, pour tout x de E, $\mu_f(f)(x) = 0$. En particulier, pour tout x de F, $\mu_f(f)(x) = 0$ ou encore $\mu_f(f_F) = 0$. Par suite, μ_f est un polynôme annulateur de f_F et donc μ_{f_F} divise μ_f.

---

6) *Le théorème de* Cayley-Hamilton

Théorème 59. (théorème de Cayley-Hamilton)

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\chi_f(f) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

Démonstration. On démontre le théorème pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle n. Soit x_0 un vecteur non nul de E. On va démontrer que $\chi_f(f)(x_0) = 0$.

Etape 1. Soit $\mathscr{E} = \left\{k \in \mathbb{N}^* / \ \left(f^i(x_0)\right)_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \text{ libre}\right\}$. $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$. Puisque $x_0 \neq 0$, $1 \in \mathscr{E}$ et en particulier $\mathscr{E}$ n'est pas vide. Puisque le cardinal d'une famille libre de E est majoré par la dimension de E, $\mathscr{E}$ est majoré par n.
En résumé, $\mathscr{E}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ (et même de $\mathbb{N}^*$). $\mathscr{E}$ admet donc un plus grand élément que l'on note p.

Etape 2. Par définition de p, la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre. On la complète (éventuellement) en $\mathscr{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0), e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ base de E.

Par définition de p, la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre et la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^p(x_0))$ est liée. On en déduit que $f^p(x_0) \in \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ et on peut donc poser

$$f^p(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0) \quad (*).$$

La matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ où } B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs fournit $\chi_f = \chi_A = \chi_B \times \chi_C$.

Etape 3. En développant suivant la dernière colonne, on a

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X - a_{p-1} \end{vmatrix}$$
$$= X^{p-1}\left(X - a_{p-1}\right) + \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p+k+1}\left(-a_k\right)\Delta_k,$$

où $\Delta_k = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \dots & \times & X & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = X^k(-1)^{p-1-k}$ (déterminant par blocs). Finalement,

$$\chi_B = X^{p-1}\left(X - a_{p-1}\right) + \sum_{k=0}^{p-2}(-1)^{p+k+1}\left(-a_k\right)X^k(-1)^{p-1-k} = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} a_k X^k$$
$$= X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k.$$

Etape 4. Par suite, $\chi_f = \left(f^p - \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k\right) \circ Q(f)$ où $Q = \chi_C$. Puisque deux polynôme en f commutent, on en déduit que

$$\chi_f\left(x_0\right) = Q(f) \circ \left(f^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k\right)\left(x_0\right) = Q(f)\left(f^p\left(x_0\right) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k\left(x_0\right)\right) = Q(f)(0) = 0.$$

On a ainsi montré que pour tout x non nul, $\chi_f(f)(x) = 0$. Ceci reste vrai pour $x = 0$ et finalement, on a montré que $\chi_f(f) = 0$.

Commentaire. Dans la démonstration précédente, on a implicitement cherché le plus petit sous-espace vectoriel de E, contenant x_0 et stable par f. Ce sous-espace se révèle être $E_f\left(x_0\right) = \text{Vect}\left(f^k\left(x_0\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \text{Vect}\left(f^k\left(x_0\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$. Dans la base $\left(f^k\left(x_0\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ de $E_f\left(x_0\right)$ choisie, la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $E_f\left(x_0\right)$ est une matrice **compagnon**. L'endomorphisme induit par f sur $E_f\left(x_0\right)$ est alors dit **cyclique**. On aurait pu poursuivre ce processus « jusqu'au bout de l'espace » et décomposer l'espace en sous-espaces supplémentaires sur lesquels l'endomorphisme induit est cyclique.

D'autre part, quand nous avons calculé χ_f par blocs à la fin de l'étape 2, on aurait pu aussi utiliser le théorème 58 qui prouvait directement que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f sur $E_f\left(x_0\right)$ divise χ_f. ❏

Ainsi, le polynôme caractéristique de f (ou de A) est un polynôme annulateur de f. Puisque les polynômes annulateurs d'un endomorphisme sont les multiples du polynôme minimal de cet endomorphisme, on aurait pu énoncer le théorème de Cayley-Hamilton sous la forme :

Théorème 60. (théorème de Cayley-Hamilton)

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors μ_f divise χ_f.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors μ_A divise χ_A.

Exercice 17. (commutant d'un endomorphisme ayant n valeurs propres simples)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres simples.

1) Montrer qu'il existe un polynôme de degré n annulateur de f.

2) a) Montrer que $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.
b) Montrer que la famille $\left(Id_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.
c) En déduire la dimension de $\mathbb{K}[f]$.

3) a) Montrer qu'il existe x_0 de E tel que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.
b) Montrer que $C(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.

Solution 17.

1) Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de f. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de f, de degré n exactement.

2) a) On a $\mathbb{K}_{n-1}[f] \subset \mathbb{K}[f]$. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
La division euclidienne de P par χ_f fournit deux polynômes Q et R tels que

$$P = Q \times \chi_f + R \text{ et } \deg(R) \leqslant n - 1.$$

En évaluant en f, on obtient $P(f) = Q(f) \circ \chi_f(f) + R(f) = R(f)$ et donc $P(f) \in \mathbb{K}_{n-1}[f]$. Ceci montre que $\mathbb{K}[f] \subset \mathbb{K}_{n-1}[f]$ et finalement que

$$\boxed{\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{n-1}[f].}$$

b) f admet n valeurs propres simples et donc f est diagonalisable.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_j^k\right) e_j = 0$$
$$\Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_j^k = 0 \text{ (car chaque } e_j \text{ est non nul).}$$

Le déterminant du système linéaire (S) d'inconnues $a_1, \ldots, a_n$ ci-dessus est $\mathrm{Van}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ce déterminant est non nul car les λ_j sont deux à deux distincts. Le système (S) est un système de Cramer homogène. (S) admet donc l'unique solution $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (0, \ldots, 0)$. On a montré que la famille $\left(Id_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.

c) D'après la question a), $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}\left(Id_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ ou encore $\left(Id_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[f]$. D'après la question b), $\left(Id_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre et donc $\left(Id_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[f]$. On en déduit que

$$\boxed{\dim(\mathbb{K}[f]) = n.}$$

3) a) Avec les notations de la question précédente, posons $x_0 = e_1 + \ldots + e_n$. Alors,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^k(x_0) = \lambda_1^k e_1 + \ldots + \lambda_n^k e_n.$$

La matrice de la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est $\mathrm{Van}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ce déterminant n'est pas nul car les λ_i sont deux à deux distincts. Donc, la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

b) On sait que $\mathbb{K}_{n-1}[f] = \mathbb{K}[f] \subset C(f)$. Réciproquement, soit $g \in C(f)$. Puisque $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E, on peut poser

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0).$$

Montrons alors que $g = P(f)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, puisque $g \in C(f)$ et que d'autre part deux polynômes en f commutent,

$$g\left(f^j(x_0)\right) = f^j(g(x_0)) = f^j(P(f)(x_0)) = P(f)\left(f^j(x_0)\right).$$

Ainsi, les endomorphismes g et $P(f)$ coïncident sur une base de E. On en déduit que $g = P(f)$.

Ceci montre que $C(f) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et finalement que

$$\boxed{C(f) = \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ et en particulier, } \dim(C(f)) = n.}$$

Commentaire. On avait établi autrement le résultat $\dim(C(f)) = n$ quand f a n valeurs propres simples dans l'exercice 15, page 38. ❑

7) Polynômes annulateurs et valeurs propres

Théorème 61.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)(x) = P(\lambda)x$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $AX = \lambda X$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$. Le théorème 23, page 15, permet déjà d'affirmer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Mais alors, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme,

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda)x.$$

On en déduit le théorème suivant qui montre que la connaissance d'un polynôme annulateur peut permettre de déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Théorème 62.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Alors, pour toute valeur propre λ de f, on a $P(\lambda) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A. Alors, pour toute valeur propre λ de A, on a $P(\lambda) = 0$.

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Soit P un polynôme annulateur de f. Soit λ une (éventuelle) valeur propre de f. Il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$. D'après le théorème 61, $0 = P(f)(x) = P(\lambda)x$. Puisque x n'est pas nul, on obtient $P(\lambda) = 0$.

Ainsi, toute valeur propre est automatiquement racine d'un polynôme annulateur. Il ne faut cependant pas croire que toute racine d'un polynôme annulateur est valeur propre. Par exemple, une projection vérifie

$$p \circ (p - \mathrm{Id}_E) \circ (p - 2\mathrm{Id}_E) = \left(p^2 - p\right) \circ (p - 2\mathrm{Id}_E) = 0 \circ (p - 2\mathrm{Id}_E) = 0.$$

Donc le polynôme $X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de p. Le théorème précédent affirme que le spectre de p (c'est-à-dire ici l'ensemble des valeurs propres de p) est contenu dans $\{0, 1, 2\}$:

$$\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1, 2\}.$$

Mais le théorème précédent ne dit pas si 0 ou 1 ou 2 sont valeur propres de p. De fait, on sait que 2 n'est pas valeur propre de p et si par exemple $p = \mathrm{Id}_E$ (qui est une projection), 0 n'est pas valeur propre de p. On retiendra

les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur.

Un cas particulier de polynôme annulateur est le polynôme minimal μ_f (ou μ_A). On sait que μ_f est un diviseur de χ_f. Donc, si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les λ_i sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f et les α_i sont des entiers naturels non nuls, alors μ_f s'écrit

$$\mu_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Mais toute valeur propre de f doit être racine du polynôme annulateur μ_f et on peut donc améliorer le résultat précèdent sous la forme

Théorème 63.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les λ_i sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f et les α_i sont des entiers naturels non nuls. Alors μ_f s'écrit

$$\mu_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les λ_i sont les valeurs propres deux à deux distinctes de A et les α_i sont des entiers naturels non nuls. Alors μ_A s'écrit

$$\mu_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

Exercice 17. Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution 17. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 4 & X+1 & 0 \\ -4 & -8 & X+2 \end{vmatrix} = (X-2)\left(X^2 - 2X + 1\right) = (X-1)^2(X+2)$. Le polynôme minimal de A est un diviseur unitaire de χ_A et admet les nombres 1 et -2 pour racines. Donc, μ_A est l'un des deux polynômes $(X-1)(X+2)$ ou $(X-1)^2(X+2)$.

Maintenant

$$(A - I_3) \times (A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \neq 0$$

et donc

$$\boxed{\mu_A = (X-1)^2(X+2).}$$

8) Le théorème de décomposition des noyaux

Théorème 64.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient P et Q deux polynômes **premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P \times Q)(f)\right) = \mathrm{Ker}(P(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient P et Q deux polynômes **premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P \times Q)(A)\right) = \mathrm{Ker}(P(A)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(A)).$$

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme f. On note tout d'abord que pour tout x de E, puisque deux polynômes en f commutent

$$x \in \mathrm{Ker}(P(f)) \Rightarrow P(f)(x) = 0 \Rightarrow Q(f)(P(f)(x)) = 0 \Rightarrow (P(f) \circ Q(f))(x) = 0 \Rightarrow (P \times Q)(f)(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}((P \times Q)(f)),$$

et donc $\mathrm{Ker}(P(f)) \subset \mathrm{Ker}((P \times Q)(f))$. De même, $\mathrm{Ker}(Q(f)) \subset \mathrm{Ker}((P \times Q)(f))$.

Puisque P et Q sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que

$$U \times P + V \times Q = 1.$$

En évaluant en f, on obtient $U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = Id_E$. Soit alors $x \in \mathrm{Ker}((P \times Q)(f)) = \mathrm{Ker}(P(f) \circ Q(f))$. En évaluant en x, on obtient

$$x = (U(f) \circ P(f))(x) + (V(f) \circ Q(f))(x) \quad (*).$$

Posons $y = (V(f) \circ Q(f))(x)$ et $z = (U(f) \circ P(f))(x)$ de sorte que $x = y + z$. Puisque deux polynômes en f commutent, on a

$$P(f)(y) = P(f)((V(f) \circ Q(f))(x)) = V(f)((P(f) \circ Q(f))(x)) = V(f)(0) = 0$$

et aussi

$$Q(f)(z) = Q(f)((U(f) \circ P(f))(x)) = U(f)((P(f) \circ Q(f))(x)) = U(f)(0) = 0.$$

Donc, $y \in \mathrm{Ker}(P(f))$ et $z \in \mathrm{Ker}(Q(f))$. On a montré que

$$\forall x \in \mathrm{Ker}((P \times Q)(f)),\ \exists (y, z) \in \mathrm{Ker}(P(f)) \times \mathrm{Ker}(Q(f)) /\ x = y + z,$$

et donc que $\mathrm{Ker}\left((P \times Q)(f)\right) = \mathrm{Ker}(P(f)) + \mathrm{Ker}(Q(f))$.

Si maintenant $x \in \mathrm{Ker}(P(f)) \cap \mathrm{Ker}(Q(f)) (\subset \mathrm{Ker}((P \times Q)(f)))$, l'égalité $(*)$ fournit $x = 0 + 0 = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(P(f)) \cap \mathrm{Ker}(Q(f)) = \{0\}$. On a montré que

$$\mathrm{Ker}\left((P \times Q)(f)\right) = \mathrm{Ker}(P(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(f)).$$

Commentaire. On rappelle qu'il y a d'autres manières de constater que deux polynômes sont premiers entre eux. Par exemple, deux polynômes non nuls sont premiers entre eux si et seulement si ces deux polynômes n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$. ❑

Le théorème précédent se généralise immédiatement par récurrence :

Théorème 65.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P_1 \times \ldots \times P_k)(f)\right) = \mathrm{Ker}\left(P_1(f)\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P_1 \times \ldots \times P_k)(A)\right) = \mathrm{Ker}\left(P_1(A)\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(A)).$$

Un cas particulier du théorème 65 est le cas où on suppose de plus que $P = P_1 \times \ldots \times P_k$ est un polynôme annulateur de f. On obtient :

Théorème 66.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** puis $P = P_1 \times \ldots \times P_k$. On suppose de plus que P est annulateur de f.

$$E = \mathrm{Ker}\,(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** puis $P = P_1 \times \ldots \times P_k$. On suppose de plus que P est annulateur de A.

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\,(P_1(A)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(A)).$$

Exemple. En maths sup, on étudie les projections vectorielles : un endomorphisme p est une projection vectorielle si et seulement si $p^2 = p$. Le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de p. Les polynômes X et $X-1$ sont premiers entre eux car sans racine commune dans $\mathbb{C}$. Le théorème de décomposition des noyaux fournit alors directement

$$E = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(p).$$

Ce résultat a déjà été établi en maths sup « à la main ». De même, $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur d'une symétrie vectorielle s. Le théorème de décomposition des noyaux fournit directement

$$E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)\,.$$

❑

9) *Une nouvelle caractérisation de la diagonalisabilité*

Théorème 67.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$.
f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme P non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(f) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme P non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(A) = 0$.

Démonstration. On montre le résultat pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

• Supposons que f soit diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f. Puisque f est diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$. P est un polynôme non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

Soient $i \in [\![1, p]\!]$ puis $x \in E_{\lambda_i}(f)$. Puisque deux polynômes en f commutent,

$$P(f)(x) = \prod_{j \neq i} (f - \lambda_j \mathrm{Id}_E)\,((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)\,(x)) = \prod_{j \neq i} (f - \lambda_j \mathrm{Id}_E)\,(0) = 0.$$

Ainsi, la restriction de l'endomorphisme $P(f)$ à chaque $E_{\lambda_i}(f)$ est nulle. Puisque ces sous-espaces sont supplémentaires, on en déduit que $P(f) = 0$. P est donc un polynôme non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de f.

• Supposons qu'il existe un polynôme P non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de f. Posons $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \mu_i)$ où les μ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Les polynômes $(X - \mu_i)$ sont deux à deux premiers entre eux et le polynôme P est annulateur de f. Le théorème de décomposition des noyaux permet d'écrire

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{Ker}\,(f - \mu_i \mathrm{Id}_E)\,.$$

Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition (on rappelle que si un $\mathrm{Ker}\,(f - \mu_i \mathrm{Id}_E)$ est nul, une base de ce noyau est $\varnothing$). $\mathscr{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f et donc f est diagonalisable.

Une variante de ce théorème est :

Théorème 68.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$.
f est diagonalisable si et seulement si μ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si il existe μ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

Démonstration. Si μ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, μ_f est un polynôme non nul, annulateur de f, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et donc f est diagonalisable d'après le théorème précédent.

Inversement, si f est diagonalisable, d'après le théorème précédent, il existe un polynôme non nul P, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de f. Puisque P est annulateur de f, μ_f est un diviseur de P et puisque P est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, il en est de même de μ_f.

Exercice 18.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = I_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Solution 18. Soit $P = X^p - 1$. P est un polynôme annulateur de A. $P' = pX^{p-1}$ admet 0 pour unique racine. Puisque 0 n'est pas racine de P, les polynômes P et P' sont sans racine commune dans $\mathbb{C}$. On en déduit que P et P' sont premiers entre eux puis que P est à racines simples.

On a trouvé un polynôme P (scindé) à racines simples tel que $P(A) = 0$ et donc A est diagonalisable.

Exercice 19.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

Solution 19.

Soit $P = X^3+X^2+X = X(X-j)(X-j^2)$. P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont éléments de $\{0, j, j^2\}$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $X^\alpha(X-j)^\beta\left(X-j^2\right)^\gamma$ avec $\alpha+\beta+\gamma = n$. De plus, A est réelle et on sait que j et $j^2 = \bar{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.

Puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\mathrm{rg}A$ est un entier pair.

On peut maintenant résumer les différentes conditions nécessaires et suffisantes ou simplement suffisantes de diagonalisabilité ou de trigonalisabilité pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Dans ce qui suit, n est la dimension de E, les α_i sont les ordres de multiplicité des valeurs propres et les n_i sont les dimensions des sous-espaces propres associés.

f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f
$\Leftrightarrow$ il existe une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale
$\Leftrightarrow$ E est somme directe des sous-espaces propres de f
$\Leftrightarrow n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i$
$\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i = \alpha_i$.
$\Leftrightarrow$ il existe un polynôme P non nul, scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples tel que $P(f) = 0$
$\Leftrightarrow \mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples
$\Leftarrow$ f a n valeurs propres simples ou encore χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples

D'autre part,

f est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

10) Les sous-espaces Ker$\left((f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}\right)$

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. On peut poser

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\alpha_i},$$

où les λ_i sont des nombres deux à deux distincts et les α_i sont des entiers naturels non nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n$ (les λ_i sont donc les valeurs propres deux à deux distinctes de f et les α_i les ordres de multiplicité correspondants).

Les polynômes $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux (car sans racine commune dans $\mathbb{C}$) et χ_f est un polynôme annulateur de f d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON. Le théorème de décomposition des noyaux permet d'écrire :

$$E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i} \quad (*).$$

On fixe dorénavant un $i \in [\![1,p]\!]$ et on étudie $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ ainsi que la restriction de f à $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$.

• $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ contient le sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ car

$$\begin{aligned} x \in E_{\lambda_i}(f) &\Rightarrow (f-\lambda_i Id_E)(x) = 0 \Rightarrow (f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i - 1}\left((f-\lambda_i Id_E)(x)\right) = 0 \\ &\Rightarrow (f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

• $(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ est un polynôme en f et donc commute avec f. On sait alors que $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f ou encore f induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ que l'on note f_i.
Que f soit diagonalisable ou pas, l'espace E a été décomposé en somme de sous-espaces supplémentaires stables par f. Dans une base adaptée à la décomposition $(*)$, la matrice de f est diagonale par blocs.

• Pour $i \in [\![1,p]\!]$, posons $d_i = \lambda_i Id_E$ et $n_i = f_i - d_i = f_i - \lambda_i Id_E$. Par définition de $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$, n_i est un endomorphisme de $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$, nilpotent, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à α_i. De plus,

$$f_i = d_i + n_i.$$

Ainsi, chaque f_i est somme d'une homothétie qui est un endomorphisme diagonalisable d_i et d'un endomorphisme nilpotent n_i. De plus, $d_i \circ n_i = n_i \circ d_i$.

• Le polynôme $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de f_i. Donc, f_i admet au plus une valeur propre à savoir λ_i. Comme d'autre part, λ_i est effectivement valeur propre de f_i puisque $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ contient le sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$, on a montré que

f_i admet exactement une valeur propre (éventuellement multiple) à savoir λ_i.

IX - Applications de la réduction

1) Calculs de puissances de matrices (ou d'endomorphismes)

On se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et on veut calculer les puissances positives de A. On fait ici la synthèse de quelques méthodes apparaissant en classes préparatoires.

1ère méthode. Utilisation d'un polynôme annulateur.

Si on connaît un polynôme non nul P annulateur de A et de degré d, la division euclidienne de X^n par P s'écrit :

$$X^n = P \times Q_n + a_{d-1}^{(n)} X^{d-1} + \ldots + a_1^{(n)} X + a_0^{(n)}.$$

En évaluant en A, on obtient

$$A^n = P(A) \times Q(A) + a_{d-1}^{(n)} A^{d-1} + \ldots + a_1^{(n)} A + a_0^{(n)} I_p = a_{d-1}^{(n)} A^{d-1} + \ldots + a_1^{(n)} A + a_0^{(n)} I_p.$$

Il n'y a donc qu'à calculer $A^0, \ldots, A^{d-1}$ et les coefficients $a_0^{(n)}, \ldots, a_{d-1}^{(n)}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Un polynôme annulateur de A est χ_A d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON.
En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -3 & -2 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix} = X\left(X^2-5X+6\right) - 2(-3X+6) - 2(2X-4)$$
$$= X(X-2)(X-3) + 6(X-2) - 4(X-2) = (X-2)(X(X-3)+2) = (X-1)(X-2)^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q \times \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$ $(*)$ où Q est un polynôme et a_n, b_n et c_n sont trois réels. En évaluant en A et en tentant compte de $\chi_A(A) = 0$, on obtient

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

Déterminons a_n, b_n et c_n. On évalue les deux membres de $(*)$ en 1 et 2 (en tenant compte de $\chi_A(1) = \chi_A(2) = 0$) puis on dérive les deux membres de $(*)$ et on évalue de nouveau en 2 (en se rappelant que $\chi_A(2) = \chi_A'(2) = 0$ puisque 2 est racine double de χ_A). On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ a_n + \left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 1 \\ 4a_n + 2\left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 2^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ -3a_n + c_n = 1 - \dfrac{n}{2}2^n \\ -4a_n + c_n = (1-n)2^n \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4\left(1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + \dfrac{n}{2}2^n \\ c_n = 3\left(1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + 1 - \dfrac{n}{2}2^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4 + \left(-\dfrac{3n}{2} + 4\right)2^n \\ c_n = 4 + (n-3)2^n \end{array}\right. .$$

De plus, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^n = \left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n\right)\begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix} + \left(-4 + \left(-\frac{3n}{2} + 4\right)2^n\right)\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + (4 + (n-3)2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -3 + 3 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ 2 - 2 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & 3 - 3 \times 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

Les calculs précédents étaient en fait maladroits car nous pouvions trouver un polynôme annulateur de degré strictement plus petit que 3. En effet, $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 1$ et donc $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 2$. Ainsi, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est la dimension du sous-espace propre correspondant. Donc, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ puis μ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. On en déduit que $\mu_A = (X-1)(X-2)$. On recommence le même travail avec μ_A (qui est aussi annulateur de A mais de degré 2).

$$X^n = Q_n \times \mu_A + a_n X + b_n$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{array}\right.$$

et donc $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$ puis

$$A^n = a_n A + b_n I_3 = (2^n - 1)\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + (2 - 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -3 + 3 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ 2 - 2 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & 3 - 3 \times 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

2ème méthode. Utilisation d'une réduction.

Si $A = PBP^{-1}$, alors $A^n = PB^nP^{-1}$. Si le calcul des puissances de B est plus simple que celui des puissances de A, on utilise cette réduction. C'est par exemple le cas si B est diagonale. Notons que cette méthode peut fournir aussi l'inverse de A en cas d'inversibilité et plus généralement les puissances négatives de A.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A = (X-1)(X-3)$ puis $E_1(A) = \text{Vect}(C_1)$ où $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_3(A) = \text{Vect}(C_2)$ où $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $A = P \times D \times P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} A^n = P \times D^n \times P^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ -1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3ème méthode. Utilisation d'un binôme.

On rappelle que si deux matrices A et B **commutent**, alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Si le calcul des puissances de A et celui des puissances de B est faisable, on peut choisir cette méthode pour calculer les puissances $A+B$.

Exemple. Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Posons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1,-1,2,2)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3E_{1,2} + E_{3,4}$ de sorte que $T = D + N$.

Un calcul par blocs montre directement que D et N commutent mais on peut retrouver ce fait :

$$DN = (-E_{1,1} - E_{2,2} + 2E_{3,3} + 2E_{4,4})(3E_{1,2} + E_{3,4}) = -3E_{1,2} + 2E_{3,4}$$

et

$$ND = (3E_{1,2} + E_{3,4})(-E_{1,1} - E_{2,2} + 2E_{3,3} + 2E_{4,4}) = -3E_{1,2} + 2E_{3,4}.$$

De plus, N est nilpotente d'indice 2 car $N^2 = (3E_{1,2} + E_{3,4})(3E_{1,2} + E_{3,4}) = 0$. La formule du binôme de Newton fournit pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} T^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N &= \text{diag}\left((-1)^n, (-1)^n, 2^n, 2^n\right) + n\,\text{diag}\left((-1)^{n-1}, (-1)^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}\right)(3E_{1,2} + E_{3,4}) \\ &= \text{diag}\left((-1)^n, (-1)^n, 2^n, 2^n\right) + 3(-1)^{n-1}nE_{1,2} + n2^{n-1}E_{3,4} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3(-1)^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

2) Calculs d'inverses de matrices inversibles (ou de réciproques d'automorphismes)

On se donne une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et on veut calculer l'inverse de A et plus généralement A^k, $k \in \mathbb{Z}$. On fait ici un bilan des quelques méthodes apparaissant en classes préparatoires.

1ère méthode. Utilisation d'un polynôme annulateur.

On suppose qu'il existe un polynôme de degré $d \geqslant 1$ tel que $P(A) = 0$. En posant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0.$$

On suppose de plus que **le coefficient constant a_0 de P n'est pas nul**. Alors,

$$\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0 \Rightarrow a_0 I_n = -\sum_{k=1}^{d} a_k A^k$$
$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I_n + \ldots + a_d A^{d-1}\right)\right) \times A = A \times \left(-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I_n + \ldots + a_d A^{d-1}\right)\right) = I_n.$$

On en déduit que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_1 I_n + \ldots + a_d A^{d-1}\right)$.

Exemple. Soit $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$. Soit $J = M(1,1)$. On a $M(a,b) = (a-b)I_n + bJ$.

La matrice J vérifie $J^2 = nJ$ et donc

$$(M(a,b) - (a-b)I_n)^2 = b^2 J^2 = nb^2 J = nb\left(M(a,b) - (a-b)I_n\right),$$

et donc

$$(M(a,b))^2 - (2a + (n-2)b)M(a,b) + (a-b)(a+(n-1)b)I_n = 0.$$

- *1er cas.* Supposons que $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$. On peut écrire

$$M(a,b) \times \left(\frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\left((2a+(n-2)b)I_n - M(a,b)\right)\right) = I_n.$$

Dans ce cas, $M(a,b)$ est inversible et

$$(M(a,b))^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & -b & \ldots & -b \\ -b & a+(n-2)b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -b & \ldots & -b & a+(n-2)b \end{pmatrix}.$$

- *2ème cas.* Si $a = b$, $\text{rg}(M(a,b)) \leqslant 1 < n$ et donc $M(a,b)$ n'est pas inversible.
- *3ème cas.* Si $a = -(n-1)b$, la somme des colonnes de $M(a,b)$ est nulle et donc $M(a,b)$ n'est pas inversible. ❏

2 ème méthode. Inversion d'une matrice de passage.

Une matrice inversible A peut toujours être interprétée comme une matrice de passage. L'inversion s'écrit alors

$$A = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \Leftrightarrow A^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.$$

Inverser A consiste donc à exprimer les vecteurs de $\mathscr{B}$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}'$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 1 + (-1) + 1 = 1 \neq 0$. Donc A est inversible. Notons (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e_1,e_2,e_3) la base de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base (i,j,k).

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i - j + k \\ e_2 = i - j \\ e_3 = i - k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = i - e_2 \\ k = i - e_3 \\ e_1 = i - (i - e_2) + (i - e_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = e_1 - e_2 + e_3 \\ j = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ k = e_1 - e_2 \end{array}\right.,$$

et donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ❏

3 ème méthode. Utilisation de la définition de l'inverse.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si on découvre B telle que $A \times B = B \times A = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exemple. Soit $A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. A est la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité. Calculons $A \times \overline{A}$.

Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l, de la matrice $A \times \overline{A}$ est

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\overline{\omega^{(u-1)(l-1)}} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{k-l}\right)^{u-1}.$$

Si $k = l$, ce coefficient vaut $\displaystyle\sum_{u=1}^{n} 1 = n$.

Si $k \neq l$, alors $k - l \neq 0$ et d'autre part, $-(n-1) \leqslant k - l \leqslant (n-1)$. En particulier, $k - l$ n'est pas multiple de n et donc $\omega^{k-l} \neq 1$. On en déduit que

$$\sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{k-l}\right)^{u-1} = \frac{1-\omega^{n(k-l)}}{1-\omega^{k-l}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k-l}} = 0.$$

Finalement, $A \times \overline{A} = nI_n$ puis $A \times \left(\dfrac{1}{n}\overline{A}\right) = I_n$. Donc, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A}$. ❑

4 ème méthode. Utilisation d'un endomorphisme.

Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \left(\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. D'après la formule du binôme de NEWTON, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$(X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i.$$

A est donc la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = \left(X^j\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$.

f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X-1) \end{array}$. On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}\left(f^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}.$$

❑

Dans la liste des techniques de calculs d'inverses, on peut encore rappeler la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}A)$ ou aussi la méthode du pivot de GAUSS. Ces deux techniques sont peu ou pas utilisées dans la pratique des exercices et problèmes de classes préparatoires. Rappelons enfin une dernière technique : l'utilisation de la calculatrice.